

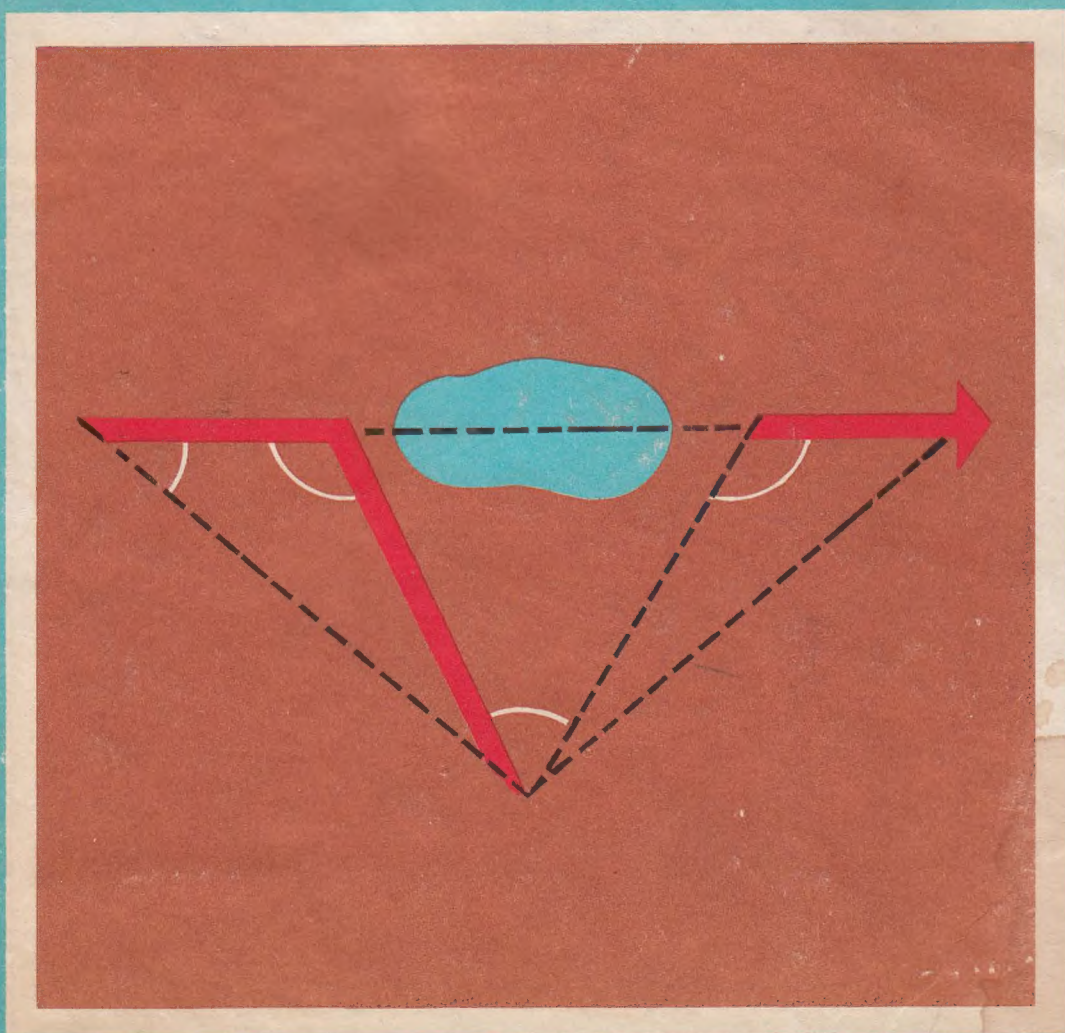
Marius Stoka

Mircea Raianu

Eugen Mărgăritescu

# Culegere de probleme de **trigonometrie**

pentru licee



*Prezenta culegere constituie un auxiliar în predarea trigonometriei în licee și a fost elaborată în conformitate cu noua programă analitică, împărțirea pe capitole corespunzând, în general, manualului de trigonometrie în vigoare. Completând manualul, culegerea va contribui atât la formarea deprinderilor de calcul a elevilor cât și la aprofundarea părții teoretice. S-a urmărit ca rezolvarea problemelor, implicată de condițiile impuse, să fie concisă și completă. În scrierea soluțiilor s-au folosit elemente de teoria mulțimilor.*

*Evident, unele soluții propuse în rezolvarea problemelor nu sînt singurele și poate nici cele mai simple. Recomandăm cititorilor să încerce a mai găsi și altele.*

*Menționăm că pentru a prezenta unitar capitolul II — Funcții trigonometrice, în rezolvarea unor probleme s-au folosit unele relații pe care cititorii le găsesc în formularul ce precede capitolul III — Formule fundamentale.*

*Pentru problemele propuse la diferite concursuri nu s-a mai făcut specificația respectivă, pentru ca elevii să acorde o egală importanță tuturor problemelor.*

*La realizarea lucrării s-au consultat culegeri, manuale și reviste de matematică realizate mai ales în țara noastră, încercîndu-se ca în prezentarea materialului să se adopte unele elemente de modernizare a predării matematicii în licee.*

**Autorii**

## Unități de măsură a unghiurilor și arcelor. Relații între ele

1. *Unghiul drept* este unghiul egal cu suplementul lui. Se notează cu 1 dr.

De exemplu:  $\hat{A} = 1,75$  dr.

2. *Gradul sexagezimal* (gradul vechi) reprezintă un unghi egal cu a 90-a parte dintr-un unghi drept. Gradul ( $1^\circ$ ) este împărțit în 60' (minute) și fiecare minut în 60" (secunde). Ca subdiviziuni ale secunde se iau fracții zecimale de secundă sau zecimi de secundă (întrebuințate în calcule de mare precizie).

$$\begin{aligned}\text{Avem:} \quad 1^\circ &= 60' = 3\,600'', \\ 1 \text{ dr} &= 90^\circ = 5\,400' = 324\,000''.\end{aligned}$$

*Exemplu.*  $\hat{A} = 67^\circ 15' 37,2''$ .

3. *Gradul centezimal* (gradul nou) reprezintă un unghi egal cu a 100-a parte din unghiul drept. Gradul ( $1^g$ ) este împărțit în 100<sup>c</sup> (minute centezimale) și fiecare minut în 100<sup>cc</sup> (secunde centezimale). Minutele și secunde centezimale se mai notează uneori și astfel: 100' și 100". Când se urmărește o precizie mai mare se iau și fracții zecimale de secundă.

$$\begin{aligned}\text{Avem:} \quad 1^g &= 100^c = 10\,000^{cc}, \\ 1 \text{ dr} &= 100^g = 10\,000^c = 1\,000\,000^{cc}.\end{aligned}$$

*Exemplu.*  $\hat{A} = 93^g 73^c 03,7^{cc}$ .

*Observație.* Calculele cu grade centezimale sînt mai ușoare și în plus oferă o precizie mai mare, fiind mai mici decît unitățile respective sexagezimale ( $1'' \approx 3^{cc}$ ).

4. *Radianul.* Dacă se ia raza cercului ca unitate de măsură a arcelor, atunci arcul cu o lungime egală cu raza cercului respectiv se numește arc de un radian (1 rad), iar unghiul la centru respectiv, unghi de un radian.

$$\begin{aligned}\text{Avem:} \quad L &= 2\pi R = 2\pi \text{ rad} = 203,14159 \text{ rad} = 6,28318 \text{ rad} \\ 4 \text{ dr} &= 360^\circ = 400^g = 2\pi \text{ rad} = 6,28318 \text{ rad}.\end{aligned}$$

Correspondența dintre câteva unghiuri uzuale în grade sexagezimale și radiani:

$n^\circ$	$0^\circ$	30	45	60	90	120	135	150	180	270	360
$n_p$	$0_p$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$

Relații de transformare:

$$2 \text{ dr} = 180^\circ = 200^g = \pi \text{ rad}$$

## Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se transforme  $\alpha = 37^\circ 23' 57''$  în unghiuri drepte.

Soluție.

$$\begin{array}{r} 90^\circ \dots\dots\dots 1 \text{ dr} \\ 37^\circ 23' 57'' \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{37^\circ 23' 57''}{90^\circ} = \frac{134\ 637''}{324\ 000''} = 0,41505 \text{ dr}, \end{array}$$

deci:  $37^\circ 23' 57'' = 0,41505 \text{ dr}$ .

2. Să se transforme  $\alpha = 37^\circ 23' 57''$  în grade centezimale.

Soluție.

$$\begin{array}{r} 90^\circ \dots\dots\dots 100^g \\ 37^\circ 23' 57'' \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{37^\circ 23' 57'' \cdot 100^g}{90^\circ} = \frac{134\ 637'' \cdot 1\ 000\ 000^{cc}}{324\ 000''}, \\ x = 415\ 546,3^{cc} = 41^g 55^o 46,3^{cc}, \end{array}$$

deci:

$$37^\circ 23' 57'' = 41^g 55^o 46,3^{cc}.$$

3. Să se transforme  $\alpha = 37^\circ 23' 57''$  în radiani.

Soluție.

$$\begin{array}{r} 180^\circ \dots\dots\dots 3,14159 \text{ rad} \\ 37^\circ 23' 57'' \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{37^\circ 23' 57'' \cdot 3,14159 \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{134\ 637'' \cdot 3,14159 \text{ rad}}{648\ 000''}, \\ x = \frac{422\ 974,25283}{648\ 000} = 0,65273 \text{ rad}, \end{array}$$

deci:

$$37^\circ 23' 57'' = 0,65273 \text{ rad}.$$

4. Să se calculeze în radiani lungimea arcului de  $10''$ .

Soluție.

$$\begin{array}{r} 180^\circ \dots\dots\dots 3,1416 \\ 10'' \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{10 \cdot 3,1416}{648\ 000} = 0,000048481 \text{ rad}. \end{array}$$

5. Să se exprime în grade sexagezimale unghiul  $\frac{3\pi}{16}$ , complementul lui  $\frac{7\pi}{8}$  și suplementul lui  $\frac{13\pi}{30}$ .



Soluție. a)  $\frac{3\pi}{16} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{16} = 33^\circ 45'.$

b)  $\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} = -\frac{3\pi}{8} = -67^\circ 30',$  c)  $\pi - \frac{13\pi}{30} = \frac{17\pi}{30} = 102^\circ.$

6. Axul unui strung face 2 000 de rotații pe minut. Să se exprime în grade centezimale unghiul parcurs de ax în 5 miimi de secundă de timp.

Soluție. Axul face într-un minut de timp  $2\,000 \cdot 400g$  grade centezimale, iar într-o secundă de timp:  $\frac{2\,000 \cdot 400g}{60}.$

Rezultă că în 5 miimi de secundă de timp unghiul parcurs este:

$$\frac{2\,000 \cdot 400g}{60} \cdot 0,005 = 66g6666.$$

7. Care este lungimea unui arc de  $80^\circ 40' 25''$ , de pe un cerc de rază  $R = 5$  m?

Soluție. Știm că:  $l = ar$ , în care:

$l$  este lungimea arcului de cerc;

$a$  — măsura în radiani a unghiului la centru corespunzător;

$r$  — lungimea razei cercului respectiv.

Transformăm deci  $80^\circ 40' 25''$  în radiani:

$$\begin{array}{r} 180^\circ \dots\dots\dots 3,1416 \\ 80^\circ 40' 25'' \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{290\,425'' \cdot 3,1416 \text{ rad}}{648\,000''} = 1,408 \text{ rad.} \end{array}$$

Rezultă că:  $l = ar = 1,408 \cdot 5 = 7,040$  m.

8. Într-un cerc cu raza  $R = 8$  cm se dă un arc egal cu 6,396 cm. Să se determine în radiani și în grade sexagezimale mărimea unghiului la centru corespunzător.

Soluție. a) Numărul radianilor =  $\frac{\text{lungimea arcului}}{\text{lungimea razei}}$ , deci:

$$n_{\text{rad}} = \frac{6,396}{8} = 0,7995 \text{ rad.}$$

$$\begin{array}{r} b) \quad 3,14159 \dots\dots\dots 180^\circ \\ 0,7995 \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{0,7995 \cdot 180^\circ}{3,14159} = 45^\circ 48' 32''. \end{array}$$

9. Să se exprime în radiani, grade sexagezimale și centezimale unghiul format de acele unui ceas la ora 3 și jumătate.

Soluție. Calculăm, mai întâi, arcul de cerc exprimat în radiani parcurs de acul mare (acul care arată orele) în 3 ore și 30 minute:

$$\begin{array}{r} 12 \dots\dots\dots 2\pi \\ 3h30m \dots\dots\dots x \\ \hline x = \frac{2\pi \cdot 3h30m}{12 \cdot 60} = \frac{2\pi \cdot 210}{12 \cdot 60} = \frac{7\pi}{12}. \end{array}$$

Unghiul  $\alpha$ , exprimat în radiani, format de acele ceasului la 3h30m este deci:

$$\alpha = \pi - \frac{7\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ rad.}$$

Rezultă:  $\alpha = \frac{5\pi}{12} \text{ rad} = 75^\circ = 83g3333.$

10. Unghiul format de tangentele în două puncte ale unui cerc cu raza de 720 m este de  $135^\circ$ ; să se afle lungimea arcului dintre cele două puncte (arc  $AB < 180^\circ$ ).

Soluție (v. fig. I,1).

1.  $OA \perp AC$

2.  $OB \perp BC$

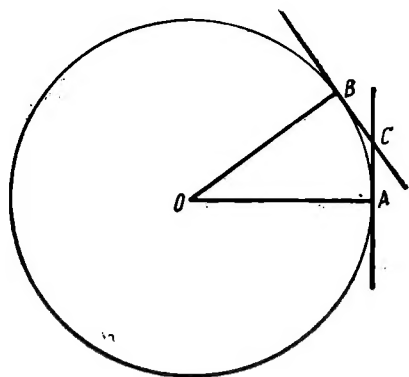


Fig. I, 1.

$$8. \widehat{BCA} = 135^\circ$$

$$4. OA = OB = R = 720 \text{ m}$$

$$5. l_{\text{arc } AB} = ?$$

Patrulaterul  $OACB$  fiind inscriptibil, avem:

$$\widehat{AOB} = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Aplicăm relația:

$$l = ar \text{ (v. aplicația 7), } a = \frac{\pi}{4} = \frac{3,1416}{4} = 0,7854 \text{ rad;}$$

$$\text{deci: } l = 0,7854 \cdot 720 = 565,48 \text{ m.}$$

11. Suma lungimilor a două cercuri este de 89,46 m. Suma arcelor care corespund la două unghiuri la centru egale în cele două cercuri este de 12,35 m. Să se afle unghiul la centru în grade sexagezimale și în radiani.

Soluție. a) Notăm cu  $R_1$  și  $R_2$  razele celor două cercuri și cu  $n^\circ$  mărimea unghiului la centru.

$$\text{Avem: } 2\pi R_1 + 2\pi R_2 = 89,46 \quad (1)$$

$$\text{și: } \frac{\pi R_1 n^\circ}{180^\circ} + \frac{\pi R_2 n^\circ}{180^\circ} = 12,35. \quad (2)$$

Din (1) obținem  $R_1 + R_2 = \frac{89,46}{2\pi}$ , sumă pe care o înlocuim în relația (2) scrisă sub forma:

$$\frac{\pi n^\circ}{180^\circ} (R_1 + R_2) = 12,35$$

$$\text{deci: } \frac{\pi n^\circ}{180^\circ} \cdot \frac{89,46}{2\pi} = 12,35, \text{ de unde:}$$

$$n^\circ = \frac{12,35 \cdot 180^\circ}{44,73} = \frac{2 \ 223}{44,73} = \frac{741}{14,91} = 49^\circ 42'.$$

$$b) \begin{array}{r} 180^\circ \dots\dots\dots 3,14 \\ 49^\circ 42' \dots\dots\dots x \end{array}$$

$$x = \frac{2 \ 982 \cdot 3,14}{10 \ 800} = 0,86 \text{ rad.}$$

12. Două mobile A și B pleacă în același moment, deplasându-se în același sens, din două puncte diametral opuse situate pe același cerc. Mobilul A descrie în fiecare minut un arc de  $30^\circ$ , iar mobilul B un arc de  $45^\circ$ .

După cât timp de la începutul mișcării se produce prima, a patra și a n-a întâlnire a mobilelor?

Soluție. Deoarece cele două mobile se deplasează pe un cerc cu viteze constante, putem aplica relația:

$$\alpha = \omega t,$$

care reprezintă legea spațiului în mișcarea circulară și uniformă și în care  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  este viteza unghiulară.

Notăm cu  $t_1$  timpul după care se produce prima întâlnire.

Avem:

$$\alpha_1 = \omega_1 t_1,$$

$$\alpha_2 = \omega_2 t_1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = (\omega_1 - \omega_2) t_1$$

$$t_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \omega_2}$$

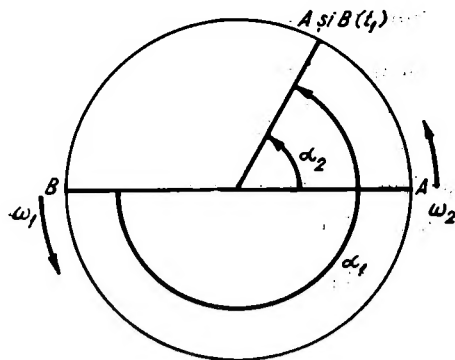


Fig. I,2.

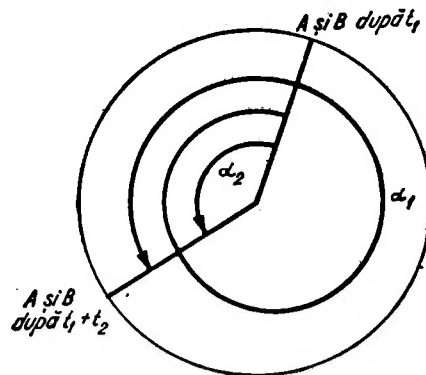


Fig. I,3.

Dar  $\alpha_1 - \alpha_2 = \pi$  (fig. I,2), deci:  $t_1 = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ .

Deoarece:  $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$  rad/min și  $\omega_2 = \frac{\pi}{6}$  rad/min (se vede ușor, fie direct, fie aplicând relația  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ),

obținem:  $t_1 = \frac{\pi}{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}$ , de unde  $t_1 = 12$  min.

Altă soluție. Presupunind că mobilul A stă pe loc, mobilul B are de parcurs spațiul  $\pi$  cu o viteză egală cu diferența vitezelor celor două mobile:

$$V_1 - V_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}, \text{ iar } t = \frac{\pi}{\frac{\pi}{12}} = 12 \text{ min.}$$

Ne propunem, în continuare, să găsim mai întâi după cât timp de la începutul mișcării se produce a  $n$ -a întâlnire.

1	.....	$t_1 = 12$	(prima întâlnire)
2	.....	$t_1 + t_2$	(a doua întâlnire)
3	.....	$t_1 + 2t_2$	(a treia întâlnire)
...	.....	.....	.....
$n$	.....	$t_1 + (n-1)t_2$	(a $n$ -a întâlnire).

$$t_n = t_1 + (n-1)t_2.$$

Dar:  $t_2 = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{2\pi}{\pi} = 24$  min (fig. I,3),

deci:  $t_n = 12(2n-1)$  min.

Pentru a găsi timpul după care se produce a patra întâlnire, înlocuim pe  $n$  cu 4. Rezultă  $t_4 = 12(2 \cdot 4 - 1) = 12 \cdot 7 = 84$  min.

## Exerciții și probleme propuse

1. Să se calculeze în radiani următoarele arce:  $1^\circ$ ;  $1'$ ;  $5'$ ;  $54^\circ$ ;  $30''$ ;  $14^\circ 12' 32''$ .
2. Să se calculeze în grade sexagezimale și centezimale arcele următoare:  $\frac{2\pi}{13}$ ;  $\frac{5\pi}{12}$ ;  $\frac{7\pi}{5}$ .

3. Să se transforme  $\alpha = 1$  rad. în grade sexagezimale.
4. Să se transforme  $\alpha = 1''$  în radiani.
5. Să se transforme  $\alpha = 83^{\circ}96'63''$  în grade sexagezimale și în radiani.
6. Să se exprime în grade, minute și secunde sexagezimale unghiul de  $145^{\circ}56'74''$ .
7. Să se transforme  $\alpha = 135^{\circ}42'57''$  în grade centezimale și în radiani.
8. Să se exprime în radiani unghiul de  $18^{\circ}15'17,5''$ .
9. Să se transforme  $\alpha = 0,73895$  rad. în grade sexagezimale și centezimale.
10. Să se exprime în grade, minute și secunde sexagezimale unghiul de  $\frac{5\pi}{7}$ .
11. Să se calculeze în grade sexagezimale complementele următoarelor arce:  $\frac{5\pi}{8}$  și  $\frac{4\pi}{15}$ .
12. Să se calculeze în grade sexagezimale suplementele următoarelor arce:  $\frac{7\pi}{20}$ ,  $\frac{16\pi}{11}$ ,  $\frac{15\pi}{37}$ .
13. Două din unghiurile unui triunghi sînt de  $15^{\circ}$  și  $80^{\circ}$ . Să se exprime în radiani al treilea unghi al triunghiului.
14. Să se calculeze în radiani și grade centezimale unghiul decagonului regulat convex.
15. Să se afle raportul arcelor  $56^{\circ}12'18''$  și  $37^{\circ}47'$ .
16. Să se afle două arce în grade sexagezimale, știind că suma lor în grade centezimale este  $78^{\circ}$ , iar diferența lor în radiani este de  $0,4$ .
17. Să se afle două arce a căror diferență este  $\frac{\pi}{8}$ , iar suma:  $51^{\circ}$ ;  $20^{\circ}52'30''$ .
18. Unul din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic este de  $1,15$  radiani. Să se calculeze câți radiani are celălalt unghi ascuțit.
19. Să se afle lungimea arcului de cerc cu raza de  $3,2$  m, știind că arcul este egal cu  $117^{\circ}$ .
20. Lungimea arcului de cerc a cărui rază este egală cu  $2,4$  m are  $3$  m. Să se exprime în grade sexagezimale acest arc.
21. Să se calculeze, în radiani și în grade sexagezimale, unghiul la centru ce corespunde arcului de  $9,6$  dm, în cercul de rază  $R = 20,5$  dm.
22. Să se calculeze lungimile arcelor de cerc ce corespund următoarelor unghiuri la centru:  
 $\hat{A} = 35^{\circ}$  în cercul de rază  $R = 5$  cm;  
 $\hat{B} = 50^{\circ}15'$  în cercul de rază  $R = 4,5$  dm;  
 $\hat{C} = 3^{\circ}09'12''$  în cercul de rază  $R = 9$  m.
23. Care este lungimea unui arc de  $152^{\circ}175'$  de pe un cerc de rază  $R = 2$  m?
24. Se știe că în același cerc de rază  $R = 3$  m, un arc este de  $340^{\circ}20'40''$ , iar altul de  $152^{\circ}40'$ . Să se calculeze lungimea diferenței acestor arce.
25. Știind că aria unui cerc este de  $123,45$  cm<sup>2</sup>, să se calculeze lungimea arcului corespunzător unghiului la centru de  $15^{\circ}20'$ .
26. Lungimile a două cercuri sînt, respectiv,  $66,50$  cm și  $30,15$  cm. Raportul a două unghiuri la centru în aceste cercuri este  $\frac{3}{4}$ , iar suma arcelor corespunzătoare  $19,51$  cm. Să se găsească unghiurile la centru.
27. În cercul cu raza de  $2,5$  cm un arc corespunde unui unghi la centru de  $1,5$  radiani. Să se calculeze, în grade sexagezimale și în radiani, unghiul la centru ce corespunde aceluiași arc în cercul cu raza de  $1$  cm.



Să se calculeze viteza unghiulară a Pământului în mișcarea sa de rotație în jurul axei polilor.

Viteza unghiulară a unei roți este de 21 rad/s. Să se determine numărul învîrtiturilor pe minut.

Rotindu-se uniform, elicea unei mori de vînt face 40 de rotații în 5 minute. Care este viteza sa unghiulară în radiani pe secundă?

Un ax se învîrtește cu viteza unghiulară  $\omega = \frac{2\pi}{9}$  rad./s. În cît timp execută o rotație completă?

Un disc execută într-un minut 320 de rotații complete. Să se calculeze viteza sa unghiulară în radiani pe secundă.

Să se exprime în grade sexagezimale și în radiani unghiul rotației unui volant dacă execută:

a) 2 rotații complete; b) 2, 3 rotații complete; c)  $\frac{5}{8}$  rotații complete.

O roată cu raza de 1,2 m face 300 învîrtituri într-un minut.

a) Să se afle viteza ei unghiulară  $\omega$  (în rad/s).

b) Să se afle viteza liniară ( $V = \omega R$ ) a unui punct de pe circumferința roții. Care este viteza unghiulară a mișcării de rotație a acelor unui ceas (acul orar, minutarul, secundarul)?

Să se exprime în radiani, grade sexagezimale și centezimale unghiul format de limbile unui ceas la 2<sup>h</sup>20<sup>m</sup>.

Două mobile  $A$  și  $B$  situate pe un cerc, decalate cu  $90^\circ$ , se deplasează începînd mișcarea în același moment. Mobilul  $A$  descrie în fiecare minut un arc de  $20^\circ$ , iar mobilul  $B$  în același timp un arc de  $-10^\circ$ . După cîte minute se produce prima, a treia, a  $n$ -a întîlnire a mobilelor?

Se consideră un dreptunghi  $MNPR$ , înscris într-un cerc, astfel ca mijlocul arcului  $MR$  să coincidă cu originea arcelor  $A$ . Știind că arcul  $AM$  este egal cu  $35^\circ 15' 33''$ , să se exprime în grade sexagezimale arcele  $AN$ ,  $AP$ ,  $AR$ , presupuse mai mici ca o circumferință, sensul pozitiv al arcelor fiind sensul  $MNPR$ .

## Funcții trigonometrice

Funcțiile trigonometrice sinus, cosinus, tangentă și cotangentă se bucură de câteva proprietăți care simplifică rezolvarea ecuațiilor trigonometrice, trasarea graficelor ș.a.

1° *Periodicitatea*. Funcțiile sinus și cosinus admit perioada  $2\pi$ ; funcțiile tangentă și cotangentă admit perioada  $\pi$ .

2° *Paritatea sau imparitatea*. Funcția cosinus este pară; funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt impare.

Dacă într-un anumit interval funcția  $f(x)$  admite valori extreme (maxime și minime), atunci  $\min f(x) \leq f(x) \leq \max f(x)$ .

În rezolvarea problemelor de maxim și minim vom ține seama că:

$\min \sin x = \sin \left( -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right) = -1$ ,  $\max \sin x = \sin \left( \frac{\pi}{2} + k2\pi \right) = 1$ ;  
 $\min \cos x = \cos (\pi + k2\pi) = -1$ ,  $\max \cos x = \cos (k2\pi) = 1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )\* și de următoarele teoreme\*\*:

**Teorema I.** Produsul mai multor puteri raționale pozitive ale unor factori pozitivi, variabili, de sumă constantă, este maxim cînd acești factori sînt proporționali cu exponenții lor, dacă aceasta este posibil.

**Teorema II.** Suma unor numere pozitive, variabile, astfel încît produsul unor puteri raționale pozitive ale acestor numere să fie constant, este minimă cînd aceste numere sînt proporționale cu exponenții lor, dacă aceasta este posibil.

---

\* Cu  $\mathbb{Z}$  s-a notat mulțimea numerelor întregi.

\*\* Pentru demonstrații poate fi consultată lucrarea — S. I. N o v o s e l o v, *Curs special de algebră elementară* (traducere din limba rusă), București, Editura tehnică, 1955, pg. 459.

## Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se calculeze expresia:  $E = \sin(180^\circ + \alpha) \cos(360^\circ - \alpha) \operatorname{ctg}(270^\circ - \alpha)$ , dacă  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{5}$ .

*Soluție.* Folosind formulele de reducere, putem scrie:  $E = -\sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha$ .

Mai departe, cu ajutorul formulelor  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,  $\sin^2 \alpha = \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , expresia precedentă devine:  $E = -\sin^2 \alpha = -\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,

de unde, înlocuind  $\operatorname{tg} \alpha$  prin 5:  $E = -\frac{25}{26}$ .

2. Să se calculeze expresia:  $E = \frac{\operatorname{tg}(-150^\circ) \cos(-210^\circ) \cos(-60^\circ)}{\operatorname{ctg}(-240^\circ) \sin(-330^\circ)}$ .

*Soluție.* Ținând seama că funcția cosinus este pară, iar funcțiile sinus, tangentă și cotangentă sînt impare, expresia devine:

$$E = -\frac{\operatorname{tg} 150^\circ \cos 210^\circ \cos 60^\circ}{\operatorname{ctg} 240^\circ \sin 330^\circ}$$

sau:

$$E = -\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) \cos(180^\circ + 30^\circ) \cos 60^\circ}{\operatorname{ctg}(270^\circ - 30^\circ) \sin(360^\circ - 30^\circ)}$$

sau încă, folosind formulele de reducere:  $E = -\frac{\operatorname{tg} 30^\circ (-\cos 30^\circ) \cos 60^\circ}{\operatorname{tg} 30^\circ (-\sin 30^\circ)}$ .

Însă  $\cos 60^\circ = \sin 30^\circ$ . Așadar:  $E = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

3. Să se demonstreze egalitatea:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \cos\left(3\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}(2\pi - \alpha)} = \frac{\sin(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(-\alpha) - \cos\left(3\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}.$$

*Soluție.* Notînd cu  $E_1$  și  $E_2$ , respectiv, membrul stîng și membrul drept al egalității, obținem:

$$E_1 = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha) \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$$

$$\text{Analog: } E_2 = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha - (-\sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}.$$

Prin urmare:  $E_1 = E_2$ .

*Observație:* Egalitatea nu are sens pentru  $\alpha = k\frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

4. Să se exprime prin funcții de argumentul  $x$  funcțiile:

$$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right),$$

unde  $k$  este un număr întreg arbitrar.

*Soluție.* Dacă  $k$  este număr par ( $k = 2l$ ), atunci:

$$\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x + l\pi) = (-1)^l \cos x = (-1)^{\frac{k}{2}} \cos x;$$

$$\text{În mod analog: } \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k}{2}} \sin x.$$

Dacă  $k$  este număr impar ( $k = 2l + 1$ ), atunci:

$$\begin{aligned}\cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(x + l\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x + l\pi) = \\ &= (-1)^{l+1} \sin x = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \sin x;\end{aligned}$$

$$\text{în mod analog avem: } \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{\frac{k+1}{2}} \cos x.$$

5. Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f(x) = \cos 2x$ .

*Soluție.* Funcția dată este periodică, cu perioada  $\frac{2\pi}{2} = \pi$ .

Pe de altă parte:  $f(-x) = \cos 2(-x) = \cos(-2x) = \cos 2x = f(x)$ ,  
deci  $\cos 2x$  este funcție pară.

Prin urmare, este suficient să se studieze variația pe un interval de lungime  $\frac{\pi}{2}$ ,  
de exemplu, pe intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Dacă  $x$  crește de la 0 la  $\frac{\pi}{2}$ , atunci  $2x$  crește de la 0 la  $\pi$ .

Fiindcă pe intervalul  $[0, \pi]$  funcția  $\cos$  este strict descrescătoare, rezultă că  $f(x)$  este strict descrescătoare pe intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  și, datorită parității, strict crescătoare pe intervalul  $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ .

Ținând seama de periodicitate, obținem următorul rezultat:  $f(x)$  este strict crescătoare pe fiecare din intervalele  $\left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi\right]$  și strict descrescătoare pe fiecare din intervalele  $[k\pi, \pi + k\pi]$ ,  $k$  fiind un număr întreg arbitrar.

6. Se consideră funcția:

$$f(x) = a \cos x + b \sin x,$$

unde  $a$  și  $b$  sînt constante arbitrare. Să se arate că dacă  $f(x)$  se anulează pentru două valori  $x_1$  și  $x_2$ , astfel ca  $x_1 - x_2 \neq k\pi$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), atunci funcția  $f(x)$  este identic nulă.

*Soluție.* Afirmția făcută va fi demonstrată dacă arătăm că  $a = b = 0$ .

Să presupunem că  $a^2 + b^2 \neq 0$ , adică cel puțin unul dintre numerele  $a, b$  este nenul.  
Atunci:

$$f(x) = \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right) \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

$$\text{unde: } \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Fie acum  $x_1$  și  $x_2$  două valori pentru care  $f(x_1) = f(x_2) = 0$  și  $x_1 - x_2 \neq k\pi$ .

Fiindcă  $\sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$ , atunci  $\sin(x_1 + \varphi) = \sin(x_2 + \varphi) = 0$ , de unde:  $x_1 + \varphi = k_1\pi$ ,  $x_2 + \varphi = k_2\pi$ ,  $k_1, k_2$  fiind numere întregi. De aici obținem:  $x_1 - x_2 = (k_1 - k_2)\pi$ , ceea ce contrazice ipoteza. Prin urmare  $a^2 + b^2 = 0$ , de unde  $a = b = 0$ .

7. Să se determine domeniul maxim de definiție al funcției:

$$a) f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}; \quad b) f(x) = \arccos \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x + 1}.$$

*Soluție.* a) Domeniul maxim de definiție este format din mulțimea punctelor  $x$  care satisfac inegalitatea:

$$\left| \frac{2x}{1+x^2} \right| \leq 1$$

sau, ținând seamă de proprietățile modulului:  $(|x| - 1)^2 \geq 0$ .

Deoarece ultima inegalitate este satisfăcută pentru orice  $x$ , deducem că domeniul maxim de definiție al funcției este axa reală.

b) Problema revine la rezolvarea sistemului de inecuații:

$$-1 \leq \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 + 3x + 1} \leq 1$$

sau, după transformări:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + 1}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ \frac{x}{(x+1)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \geq 0. \end{cases}$$

Pentru prima inecuație a sistemului precedent se obțin soluțiile:

$$x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right),$$

iar pentru a doua:  $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup [0, +\infty)$ .

Intersectând cele două mulțimi, deducem că domeniul maxim de definiție al funcției este intervalul  $[0, +\infty)$ .

8. Să se arate că funcția  $f(x) = \sin \sqrt{2}x + \cos \sqrt{3}x$  nu este periodică.

Soluție. Funcțiile  $\sin \sqrt{2}x$  și  $\cos \sqrt{3}x$  sînt periodice, cu perioadele, respectiv,  $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$  și  $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ .

Dacă  $f(x)$  admite perioada  $T$ , atunci numerele  $T: \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$  și  $T: \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$  sînt întregi. De aici rezultă că  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  este număr rațional, ceea ce nu este adevărat. Prin urmare, funcția dată nu este periodică.

9. Să se calculeze:

$$a) \arcsin \left[ \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right]; \quad b) \operatorname{arccotg} \left[ \operatorname{ctg} \left( -\frac{\pi}{5} \right) \right].$$

Soluție. a)  $\sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) = -\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Prin urmare:

$$\arcsin \left[ \sin \left( -\frac{3\pi}{4} \right) \right] = \arcsin \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}.$$

b) Notînd  $\operatorname{arccotg} \left[ \operatorname{ctg} \left( -\frac{\pi}{5} \right) \right] = \alpha$ , obținem:  $\operatorname{ctg} \left( -\frac{\pi}{5} \right) = \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $\alpha \in (0, \pi)$ .

Egalitatea precedentă este satisfăcută numai pentru  $\alpha = \pi - \frac{\pi}{5} = \frac{4\pi}{5}$ , fiindcă pe intervalul  $(0, \pi)$  funcția cotangentă este strict descrescătoare.

10. Să se calculeze:

$$a) \operatorname{tg} \left( 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right); \quad b) \sin \left[ 2 \arccos \left( -\frac{3}{5} \right) \right].$$

Soluție. a)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ . Prin urmare:  $\operatorname{tg} \left( 2 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ .

b) Făcînd notația  $\arccos \left( -\frac{3}{5} \right) = \alpha$ , obținem:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ .

Așadar:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = + 2 \cos \alpha \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = 2 \left( -\frac{3}{5} \right) \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{24}{25}.$$

11. Să se exprime  $\arccos \left( -\frac{2}{3} \right)$  prin  $\arcsin$ .

Soluția 1°. Avem:  $-1 < -\frac{2}{3} < 0$ .

Prin urmărire, dacă notăm  $\arccos \left( -\frac{2}{3} \right) = \alpha$ , atunci  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , de unde  $-\frac{\pi}{2} < \alpha - \pi < 0$ .

Pe de altă parte:

$$\sin (\alpha - \pi) = -\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

De aici rezultă că:  $\alpha - \pi = \arcsin \left( -\frac{\sqrt{5}}{3} \right)$

și deci:  $\arccos \left( -\frac{2}{3} \right) = \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$ .

Soluția 2°. Ținând seama de identitatea  $\arccos \alpha + \arcsin \alpha = \frac{\pi}{2}$ ,

se obține direct:  $\arccos \left( -\frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{2} - \arcsin \left( -\frac{2}{3} \right)$  sau, deoarece funcția  $\arcsin$  este im-

pară:  $\arccos \left( -\frac{2}{3} \right) = \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{2}{3}$ .

12. Să se calculeze:

$$a) \sin \left[ \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right]; \quad b) \cos \left[ 2 \left( \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right) \right].$$

Soluție. a)  $\arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{\pi}{6}$ ;  $\operatorname{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) = -\frac{\pi}{6}$ .

Prin urmărire:

$$\sin \left[ \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right) + 2 \operatorname{arctg} \left( -\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right] = \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -1.$$

$$b) \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}; \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Prin urmărire:

$$\cos \left[ 2 \left( \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg} \sqrt{3} \right) \right] = \cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

13. Să se calculeze:

$$a) \sin \left( \arccos \frac{3}{5} + \arccos \frac{15}{17} \right); \quad b) \cos \left[ \arcsin \left( -\frac{12}{13} \right) + \arcsin \frac{4}{5} \right].$$

Soluție. a) Notând  $\arccos \frac{3}{5} = \alpha$ ,  $\arccos \frac{15}{17} = \beta$ , avem:

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

$$\text{Însă: } \cos \alpha = \frac{3}{5}, \quad \cos \beta = \frac{15}{17}. \quad (2)$$

Pe de altă parte:  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ , deci:

$$\sin \alpha = +\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}; \quad \sin \beta = +\sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{225}{289}} = \frac{8}{17}. \quad (3)$$



Ținând seama de (2) și (3), relația (1) devine:  $\sin(\alpha + \beta) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{17} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{17} = \frac{84}{85}$ .

b) Notînd  $\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) = \alpha$ ,  $\arcsin\frac{4}{5} = \beta$ , avem:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (1)$$

$$\text{Însă: } \sin \alpha = -\frac{12}{13}, \quad \sin \beta = \frac{4}{5}. \quad (2)$$

Pe de altă parte:  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0; 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ ,

de unde:  $\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13^2}} = \frac{5}{13}$ ;

$$\cos \beta = +\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5}. \quad (3)$$

Ținînd seama de (2) și (3), relația (1) devine:  $\cos(\alpha + \beta) = \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{63}{65}$ .

*Observație.* În rezolvarea exercițiului se putea ține seama de faptul că funcția arcsin este impară.

14. Să se demonstreze egalitățile: a)  $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = 1$ ;

b)  $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$ ; c)  $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ .

*Soluție.* a) Fiindcă  $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{3}{5} = \frac{\pi}{2}$ ,

atunci:  $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) = \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$ .

Așadar  $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{5}\right) \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right) \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = 1$ .

b) Notînd  $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$ , rezultă că  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , de unde:

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{4^2}{5^2}} = \frac{3}{5}$$

și deci:  $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$ .

Așadar, membrul sting al egalității devine  $\arcsin\frac{3}{5} + \arccos\frac{3}{5}$  și, conform unei formule cunoscute, este egal cu  $\frac{\pi}{2}$ .

c) Notînd  $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \alpha$ ,  $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \beta$  și ținînd seama de faptul că funcția arctg este strict crescătoare, din inegalitățile:

$$0 < \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad 0 < \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

obținem:  $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ . (1)

$$\text{Pe de altă parte: } \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1. \quad (2)$$

Din relațiile (1) și (2) obținem:  $\alpha + \beta = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , c.c.t.d.\*

15. Să se demonstreze egalitățile: a)  $\arcsin \frac{12}{13} - \arcsin \frac{3}{5} = \arcsin \frac{33}{65}$ ;

b)  $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ .

Soluție. a) Notînd  $\arcsin \frac{12}{13} = \alpha$ ,  $\arcsin \frac{3}{5} = \beta$  și ținînd seama de inegalitățile:

$$0 < \frac{12}{13} < 1, \quad \frac{1}{2} < \frac{3}{5} < 1, \quad \text{rezultă că: } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} < \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ de unde: } -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Pe de altă parte:

$$\cos \alpha = +\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}; \quad \cos \beta = +\sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \frac{4}{5},$$

$$\text{iar: } \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} - \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{33}{65}. \quad (2)$$

Din (1) și (2) rezultă că:  $\alpha - \beta = \arcsin \frac{33}{65}$ .

b) Se constată ușor că:

$$\frac{\pi}{6} < \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{6} < \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}. \quad (1)$$

Luînd tangenta ambilor membri ai egalității date, obținem:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{7}{4}; \quad \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right) = \frac{5 - \frac{1}{3}}{1 + 5 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{7}{4}.$$

Prin urmare, ținînd seama de (1) și de relațiile precedente:

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \operatorname{arctg} \frac{7}{4}; \quad \operatorname{arctg} 5 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \frac{7}{4}, \quad \text{de unde rezultă egalitatea dată.}$$

16. Să se traseze graficul funcției  $f(x) = |\sin x|$ .

$$\text{Soluție. } |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } \sin x \geq 0, \\ -\sin x, & \text{dacă } \sin x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{sau } |\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ -\sin x, & \text{dacă } x \in [k2\pi - \pi, k2\pi], \end{cases}$$

unde  $k$  este un număr întreg arbitrar.

De aici rezultă graficul funcției (fig. II, 1).

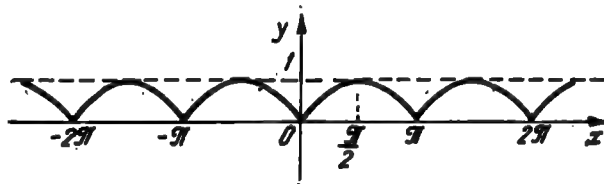


Fig. II, 1

17. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \sin |x|$ .

$$\text{Soluție. } \sin |x| = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -\sin x, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

\* Ceea ce trebuia demonstrat.

Prin urmare, graficul funcției date este cel din figura II, 2.

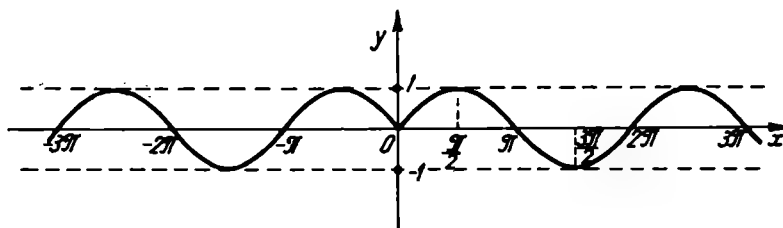


Fig. II, 2

18. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \sin x - |\sin x|$ .

Soluție.  $|\sin x| = \begin{cases} \sin x, & \text{dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ -\sin x, & \text{dacă } x \in [-\pi + k2\pi, k2\pi], \end{cases}$

$k$  fiind un număr întreg arbitrar.

Așadar:  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \in [k2\pi, \pi + k2\pi], \\ 2 \sin x, & \text{dacă } x \in [-\pi + k2\pi, k2\pi], \end{cases}$

de unde se obține fără dificultate graficul (fig. II, 3).

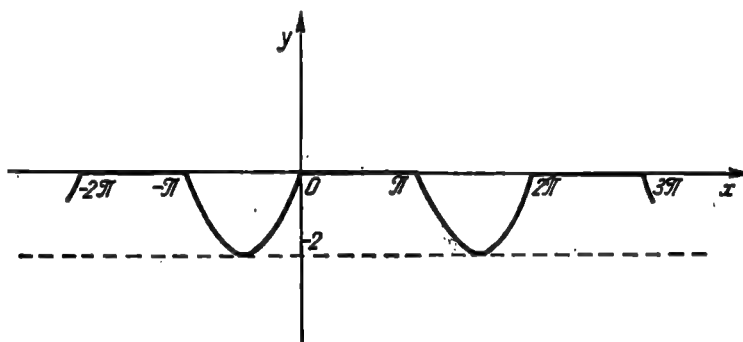


Fig. II, 3

19. Să se determine amplitudinea, perioada, frecvența și faza inițială și să se construiască graficul oscilației armonice simple  $y = 2 \sin \left( \frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ .

Soluție. Ecuația unei oscilații armonice simple poate fi scrisă sub forma  $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ , unde  $|a|$  este amplitudinea oscilației,  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  perioada mișcării,  $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  frecvența mișcării, iar  $\varphi$  faza inițială.

În cazul problemei,  $|a| = 2$ ,  $T = 4\pi$ ,  $\nu = \frac{1}{4\pi}$ ,  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

Cu ajutorul tabelului următor:

$t$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$	$\frac{7\pi}{2}$	$4\pi$
$y$	$\sqrt{2}$	$\nearrow 2 \searrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow 0 \searrow$	$-\sqrt{2}$	$\searrow -2 \searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow 0 \searrow$	$\sqrt{2}$

se poate construi graficul oscilației în intervalul  $[0, 4\pi]$ , de lungime egală cu perioada sa (fig. II, 4).

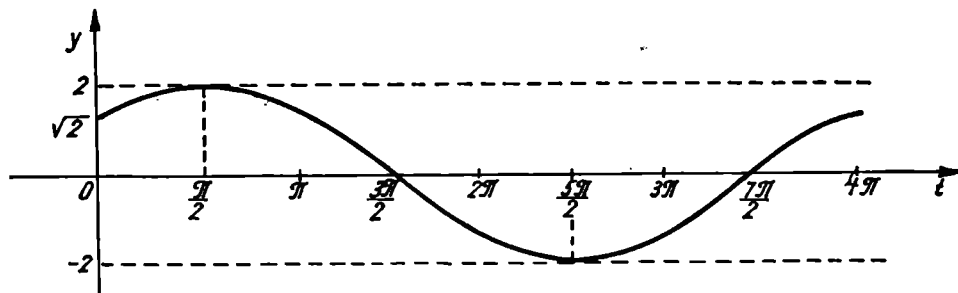


Fig. II, 4

20. Să se traseze graficul funcției  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ .

*Soluție.* Domeniul maxim de definiție al funcției este  $R - \{0\}$ .

Pe de altă parte, funcția dată este pară, deci este suficient s-o studiem în intervalul  $(0, +\infty)$ .

Punctele de intersecție a curbei cu axa absciselor se determină din relația  $\cos \frac{1}{x} = 0$ ,

de unde:  $\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  și deci  $x = \frac{2}{(2k+1)\pi}$ .

Din inegalitatea  $\left| \cos \frac{1}{x} \right| \leq 1$  rezultă că curba este cuprinsă în banda determinată de dreptele  $y = \pm 1$ .

Valoarea maximă, egală cu 1, este luată de funcție în punctele în care  $\cos \frac{1}{x} = 1$ , adică  $x = \frac{1}{k2\pi}$ . Valoarea minimă, egală cu -1, este luată de funcție în punctele în care  $\cos \frac{1}{x} = -1$ ,

adică  $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ .

Cu ajutorul tabelului următor:

$x$	$0 \dots$	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{2}{7\pi}$	$\frac{1}{3\pi}$	$\frac{2}{5\pi}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{2}{3\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$+\infty$
$y = \cos \frac{1}{x}$	$\dots$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1

se construiește graficul funcției pe intervalul  $(0, +\infty)$ . Ținând seama că funcția este pară, prin simetrie față de axa ordonatelor, se construiește graficul său pe  $R - \{0\}$  (fig. II, 5).

21. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \cos(2 \arccos x)$ .

*Soluție.* Folosind identitățile  $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ,  $\cos(\arccos \alpha) = \alpha$ , putem scrie:  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Graficul acestei funcții este un arc de parabolă (fig. II, 6).

*Observație.* Se poate arăta că funcțiile  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sînt polinoame de gradul  $n$ , definite pe intervalul  $[-1, 1]$ . Ele se numesc polinoamele lui Cebîșev și satisfac relația de recurență  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ .

22. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x}$ .

*Soluție.* Ținând seama că funcția  $\arcsin u$  este definită pentru  $-1 \leq u \leq 1$ , se obțin inegalitățile:

$$0 \leq 1-x \leq 1; 0 \leq x \leq 1$$

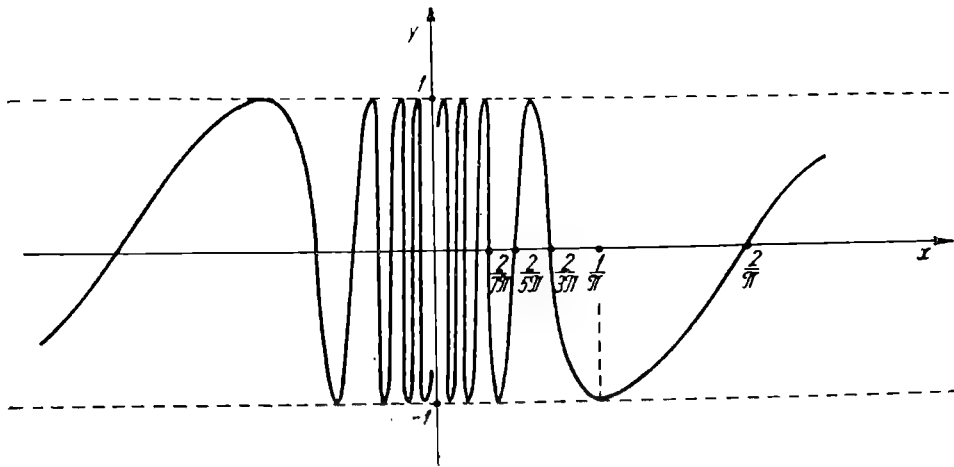


Fig. II, 5.

20. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \cos(2 \arccos x)$ .

Soluție. Folosind identitățile  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ ,  $\cos(\arccos x) = x$ , putem scrie:  $f(x) = 2x^2 - 1$ ,  $x \in [-1, 1]$ .

Graficul acestei funcții este un arc de parabolă (fig. II, 6).

Observație. Se poate arăta că funcțiile  $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sînt polinoame de gradul  $n$ , definite pe intervalul  $[-1, 1]$ . Ele se numesc polinoamele lui Cebîșev și satisfac relația de recurență  $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ .

21. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \arcsin \sqrt{1-x} + \arcsin \sqrt{x}$ .

Soluție. Ținînd seama că funcția  $\arcsin u$  este definită pentru  $-1 \leq u \leq 1$ , se obțin inegalitățile:

$$0 \leq 1-x \leq 1; 0 \leq x \leq 1$$

care sînt satisfăcute pentru  $0 \leq x \leq 1$ . Așadar, funcția dată este definită pe intervalul  $[0, 1]$ .

Pentru aceste valori ale argumentului:

$$\arcsin \sqrt{1-x} = \arccos \sqrt{1-(\sqrt{1-x})^2} = \arccos \sqrt{x}$$

Prin urmare:  $f(x) = \arccos \sqrt{x} + \arcsin \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$ .

Graficul funcției este un segment de dreaptă paralel cu axa absciselor (fig. II, 7).

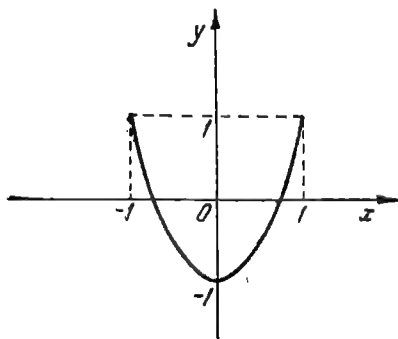


Fig. II, 6

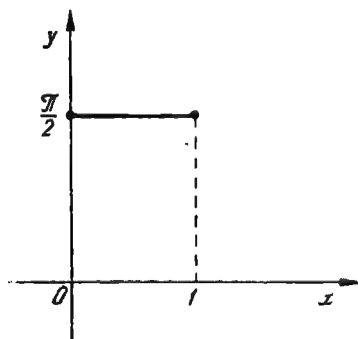


Fig. II, 7.

Așadar, pentru  $x \geq 0$ , avem:  $f(x) = 2 \operatorname{arctg} x$ , iar pentru  $x \in \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x \geq 0, \\ -2 \operatorname{arctg} x, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$$

Acum, graficul funcției se poate construi cu ușurință (fig. II, 8).

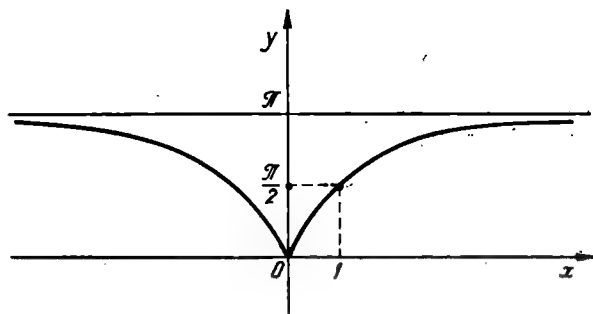


Fig. II, 8

24. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ .

$$\text{Soluție. } \operatorname{tg} f(x) = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x \cdot \frac{1-x}{1+x}} = 1. \quad (1)$$

$$\text{Însă: } -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} u < \frac{\pi}{2}, \quad \text{deci:} \quad (2)$$

$$-\pi < f(x) < \pi.$$

$$\text{Din (1) și (2) rezultă că } f(x) = \frac{\pi}{4},$$

$$\text{sau } f(x) = -3\frac{\pi}{4}. \text{ Evident, ultima ega-}$$

litate poate avea loc numai dacă  $x < 0$  și  $\frac{1-x}{1+x} < 0$ , adică pentru  $x < -1$ . Prin urmare:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{3\pi}{4}, & \text{dacă } x < -1, \\ \frac{\pi}{4}, & \text{dacă } x > -1 \end{cases}$$

și graficul său este format din două semidrepte paralele cu axa absciselor (fig. II, 9).

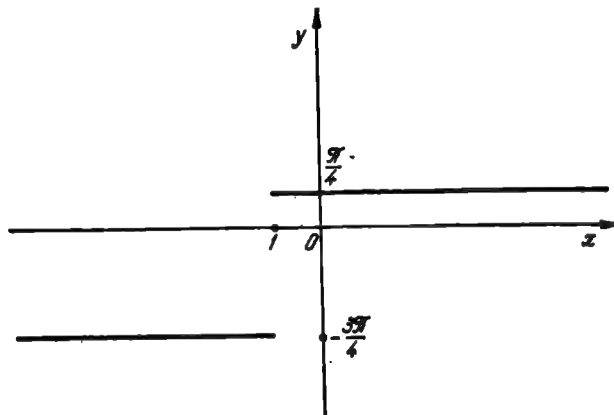


Fig. II, 9

## Maxime și minime trigonometrice

25. Un proiectil iese din țeava unui tun cu viteza inițială  $v_0$  sub un unghi  $\alpha$  cu orizontala. Să se determine înclinarea țevii, astfel încât bătaia tunului să fie maximă (se neglijează rezistența aerului).



**Soluție.** În vid, proiectilul descrie un arc de parabolă. Bătaia tunului este lungimea segmentului  $OA$  (fig. II, 10).

Dacă  $M(x, y)$  este un punct aparținând traiectoriei, atunci:

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2,$$

unde  $t$  este timpul.

Coordonatele punctului  $A$  sînt date de soluția pozitivă a sistemului:

$$\begin{cases} y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 = 0, \\ x = v_0 t \cos \alpha. \end{cases}$$

Din prima ecuație a sistemului, obținem:

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} \text{ și deci: } OA = x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Fiindcă  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  și  $\max \sin 2\alpha = 1$ , atunci:

$$\max x = \frac{v_0^2}{g} \text{ și se obține pentru } \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

26. Să se determine minimul funcției:  $f(x) = (\sin x + \operatorname{cosec} x)^2 + (\cos x + \sec x)^2$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Soluție.** Funcția dată poate fi scrisă sub forma:

$$f(x) = 5 + \frac{4}{\sin^2 2x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right),$$

de unde:  $\min f(x) = 5 + \frac{4}{\max \sin^2 2x} = 5 + \frac{4}{1} = 9$  și se obține pentru  $x = \frac{\pi}{4}$ .

27. Să se determine valorile extreme ale funcției:  $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ .

**Soluție.** Folosind identitățile:

$a^3 + b^3 = (a + b)[(a + b)^2 - 3ab]$ ,  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , funcția considerată se poate scrie sub forma:  $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .

Însă:  $\max \sin^2 2x = 1$ ;  $\min \sin^2 2x = 0$ .

Așadar:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= 1 - \frac{3}{4} \max \sin^2 2x = \frac{1}{4}; \quad \max f(x) = 1 - \\ &\quad - \frac{3}{4} \min \sin^2 2x = 1. \end{aligned}$$

28. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat.

**Soluție.** Fie  $x, y$  dimensiunile dreptunghiului înscris în cercul de rază  $R$ , iar  $S$  aria sa.

Dacă  $\alpha$  este unul din unghiurile ascuțite ale triunghiului dreptunghic format de două laturi consecutive ale dreptunghiului și de diagonala corespunzătoare (fig. II, 11), atunci:  $x = 2R \sin \alpha$ ,  $y = 2R \cos \alpha$ , de unde:  $S = xy = 2R^2 \sin 2\alpha$ . Prin urmare:  $\max S = 2R^2 \max \sin 2\alpha = 2R^2$  și se obține pentru  $\alpha = 45^\circ$ .

În concluzie, dreptunghiul de arie maximă înscris într-un cerc dat este pătratul.

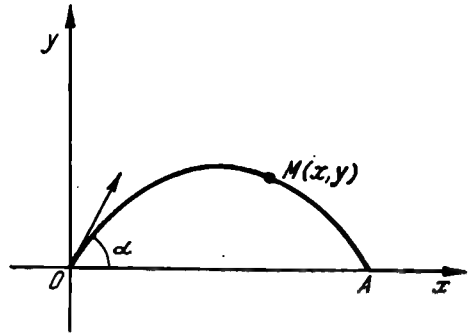


Fig. II, 10

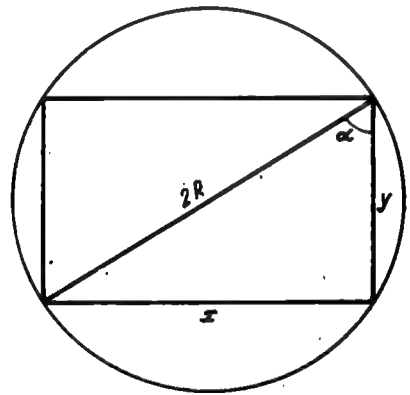


Fig. II, 11

**29. Să se determine valorile extreme ale funcției:**  $f(x) = a \sin x + b$ .

*Soluție.* Ținând seama de inegalitățile:  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , deducem că:

$$\begin{aligned} & -a \leq a \sin x \leq a, & \text{dacă } a > 0 \\ & \text{și } a \leq a \sin x \leq -a, & \text{dacă } a < 0, \\ & \text{de unde: } b - a \leq a \sin x + b \leq b + a, & \text{dacă } a > 0 \\ & \text{și } b + a \leq a \sin x + b \leq b - a, & \text{dacă } a < 0. \end{aligned}$$

Inegalitățile precedente pot fi scrise împreună sub forma:

$$\begin{aligned} & b - |a| \leq a \sin x + b \leq b + |a|, \\ & \text{de unde: } \min f(x) = b - |a|; \quad \max f(x) = b + |a|. \end{aligned}$$

*Observație.* Raționamentul făcut și concluzia rămân valabile dacă se înlocuiește  $\sin x$  cu  $\cos x$ .

**30. Să se determine valorile extreme ale funcției:**

$$f(x) = a \sin x + b \cos x \quad (ab \neq 0).$$

*Soluție.* Notând  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi \left( -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$ , putem scrie:

$$f(x) = \pm \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi),$$

unde se ia semnul plus sau minus, după cum  $a > 0$  sau  $a < 0$ .

$$\text{Deoarece: } |f(x)| = \sqrt{a^2 + b^2} |\sin(x + \varphi)| \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\text{adică: } -\sqrt{a^2 + b^2} \leq f(x) \leq \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\text{rezultă că: } \min f(x) = -\sqrt{a^2 + b^2}; \quad \max f(x) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

**31. Să se determine valorile extreme ale funcției:**  $f(x) = a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ .

*Soluție.* Ținând seama de identitățile:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

funcția dată se poate exprima liniar în  $\sin 2x$  și  $\cos 2x$ :

$$f(x) = \frac{a+c}{2} + \frac{1}{2} [(c-a) \cos 2x + b \sin 2x].$$

Prin urmare (v. problema precedentă):

$$\frac{a+c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \leq f(x) \leq \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2},$$

de unde:

$$\min f(x) = \frac{a+c - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}; \quad \max f(x) = \frac{a+c + \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ac}}{2}.$$

**32. Să se determine valorile extreme ale funcției:**  $f(x) = \cos 2x + \cos x$ .

*Soluție.* Notând  $\cos x = t$ , problema revine la determinarea minimului și maximului funcției:  $\varphi(t) = 2t^2 + t - 1$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

Fiindcă funcția  $\varphi(t)$  este strict descrescătoare pe intervalul  $\left[-1, -\frac{1}{4}\right]$  și strict crescătoare pe intervalul  $\left[-\frac{1}{4}, 1\right]$ , obținem:  $\min f(x) = \min \varphi(t) = \varphi\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{9}{8}$ ,

$$\max f(x) = \max \varphi(t) = \max [\varphi(-1), \varphi(1)] = \max (0, 2) = 2^*.$$

**33. Să se determine maximul funcției:**  $f(x) = -\sin^2 x + 3 \sin x + 10$ .

*Soluție.* Notând  $\sin x = t$ , problema revine la determinarea maximului funcției  $\varphi(t) = -t^2 + 3t + 10$ , cu condiția ca  $-1 \leq t \leq 1$ .

\* Prin  $\max(a, b)$  se înțelege cel mai mare dintre numerele  $a, b$ .

Deoarece funcția  $\varphi(t)$  este strict crescătoare pe intervalul  $[-1, 1]$ , obținem:  $\max \varphi(t) = \varphi(1) = 12$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

**34. Să se determine valorile extreme ale funcției:**  $f(x) = \sin^2 x + p \sin x + q$  **pe segmentul**  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

*Soluție.* Notînd  $\sin x = t$ , problema revine la determinarea valorii maxime și a celei minime a trinomului:

$$\varphi(t) = t^2 + pt + q, t \in [-1, 1].$$

După cum se știe, acesta are un minim în punctul  $t = -\frac{p}{2}$ , pe intervalul  $(-\infty, -\frac{p}{2})$  este strict descrescător, iar pe intervalul  $(-\frac{p}{2}, +\infty)$  este strict crescător.

Sînt posibile următoarele cazuri:

1°  $-\frac{p}{2} \leq -1$ , adică  $p \geq 2$ . În acest caz, pe segmentul  $[-1, 1]$  trinomul este strict crescător; prin urmare  $f(x)$  ia valoarea minimă pentru  $t = -1$  ( $x = -\frac{\pi}{2}$ ) și valoarea maximă pentru  $t = 1$  ( $x = \frac{\pi}{2}$ ):

$$\min f(x) = \varphi(-1) = 1 - p + q; \max f(x) = \varphi(1) = 1 + p + q.$$

2°  $-1 < -\frac{p}{2} < 1$ , adică  $-2 < p < 2$ . Atunci trinomul ia valoarea minimă în punctul  $t = -\frac{p}{2}$  ( $x = -\arcsin \frac{p}{2}$ ):

$$\min f(x) = \varphi\left(-\frac{p}{2}\right) = -\frac{p^2 - 4q}{4}.$$

Valoarea maximă a trinomului este  $\max [\varphi(-1), \varphi(1)]$ , adică:

$$\max f(x) = \max (1 - p + q, 1 + p + q) = 1 + |p| + q.$$

3°  $-\frac{p}{2} \geq 1$ , adică  $p \leq -2$ . Pe segmentul  $[-1, 1]$  trinomul este strict descrescător; prin urmare  $f(x)$  ia valoarea minimă pentru  $t = 1$  ( $x = \frac{\pi}{2}$ ) și valoarea maximă pentru  $t = -1$  ( $x = -\frac{\pi}{2}$ ):

$$\min f(x) = \varphi(1) = 1 + p + q; \max f(x) = \varphi(-1) = 1 - p + q.$$

**35. Să se determine minimul funcției:**  $f(x) = \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ .

*Soluția 1.* Notînd  $\operatorname{tg} x = t$ , funcția dată se scrie:  $\varphi(t) = \frac{t^2 + 3}{t}$ ,  $t \in (0, +\infty)$ .

Dacă funcția  $\varphi(t)$  admite un minim  $a$  ( $a > 0$ ), atunci inegalitatea:  $\frac{t^2 + 3}{t} \geq a$  este satisfăcută pentru orice  $t \in (0, +\infty)$ .

Însă inegalitatea precedentă este echivalentă cu inegalitatea:  $t^2 - at + 3 \geq 0$ , care este satisfăcută pentru orice  $t > 0$ , dacă și numai dacă:  $\Delta = a^2 - 12 \leq 0$ , adică pentru  $a \in (0, 2\sqrt{3}]$ .

De aici rezultă că  $\min f(x) = \min \varphi(t) = 2\sqrt{3}$  și se obține pentru  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ , adică pentru  $x = \frac{\pi}{3}$ .

*Soluția 2.* Notînd  $\operatorname{tg} x = u$ ,  $3 \operatorname{ctg} x = v$  și ținînd seama de identitatea:

$$(u + v)^2 = (u - v)^2 + 4uv,$$

obținem:  $[f(x)]^2 = (\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x)^2 + 12$ .

Însă  $(\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x)^2 \geq 0$ , deci:  $\min [f(x)]^2 = \min (\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x)^2 + 12 = 12$

și se obține pentru  $\operatorname{tg} x - 3 \operatorname{ctg} x = 0$ , adică pentru  $x = \frac{\pi}{3}$ . Fiindcă  $f(x) > 0$ , rezultă că:

$$\min f(x) = \sqrt{\min [f(x)]^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

**36. Să se determine valorile extreme ale funcției:**

$$f(x) = \cos^m x \sin^n x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

unde  $m$  și  $n$  sînt numere raționale pozitive date.

*Soluție.* Scriind funcția sub forma:  $f(x) = (\cos^2 x)^{\frac{m}{2}} (\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}$  și ținînd seama de identitatea  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ , rezultă că sîntem în condițiile teoremei I. Așadar, produsul precedent este maxim cînd factorii sînt proporționali cu exponenții lor (dacă este posibil). În cazul de față există  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , astfel încît să fie satisfăcută egalitatea:

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{m}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{n}{2}}.$$

Într-adevăr, aplicînd o proprietate a rapoartelor egale, obținem:

$$\frac{\cos^2 x}{\frac{m}{2}} = \frac{\sin^2 x}{\frac{n}{2}} = \frac{1}{\frac{m+n}{2}},$$

$$\text{de unde: } \sin^2 x = \frac{n}{m+n}; \quad \cos^2 x = \frac{m}{m+n}$$

$$\text{și deci: } \operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{n}{m}}$$

$$\text{sau: } x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

$$\text{Evident: } \max f(x) = \left(\frac{m}{m+n}\right)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{n}{m+n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Pentru a determina  $\min f(x)$  este suficient să observăm inegalitățile  $\sin^n x \geq 0$ ,  $\cos^m x \geq 0$ , de unde rezultă că:  $\min f(x) = 0$  și acesta se obține pentru  $x \in \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$ .

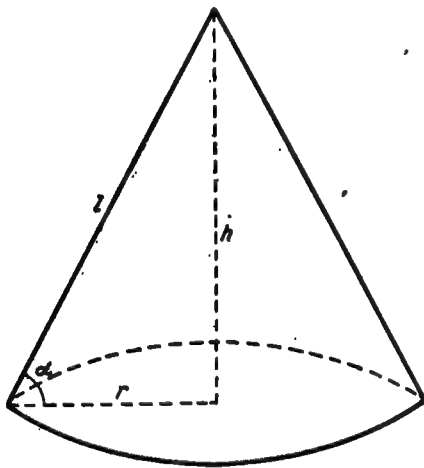


Fig. II, 12

**37. Să se găsească conul circular drept de volum maxim a cărui generatoare are lungimea constantă  $l$  (fig. II, 12).**

*Soluție.* Fie  $\alpha$  unghiul format de generatoare cu planul bazei conului,  $h$  înălțimea conului, iar  $r$  raza bazei.

$$\begin{aligned} \text{Atunci: } V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (l \cos \alpha)^2 \cdot l \sin \alpha = \\ &= \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\text{sau: } V = \frac{1}{3} \pi l^3 \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}.$$

Refăcînd raționamentul din problema precedentă, obținem:  $\max V = \frac{2\pi l^3}{9\sqrt{3}}$  și, în acest caz:  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

38. Să se determine minimul funcției:  $f(x) = \operatorname{tg}^m x + \operatorname{ctg}^n x$ ,  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , unde  $m$  și  $n$  sînt numere raționale pozitive date.

*Soluție.* Din identitatea:  $(\operatorname{tg}^m x)^{\frac{1}{m}} \cdot (\operatorname{ctg}^n x)^{\frac{1}{n}} = 1$ , rezultă că se poate aplica teorema II. Obținem:  $\frac{\operatorname{tg}^m x}{\frac{1}{m}} = \frac{\operatorname{ctg}^n x}{\frac{1}{n}} = \lambda$ ,

de unde, după cîteva calcule simple:  $\lambda = (m^n n^m)^{\frac{1}{m+n}}$ .

Prin urmare:  $\min f(x) = \lambda \left( \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) = \frac{m+n}{mn} (m^n n^m)^{\frac{1}{m+n}}$

și, în acest caz:  $x = \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda}{m} \right)^{\frac{1}{m}}$ .

## Exerciții și probleme propuse

1. Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:

- a)  $\operatorname{ctg} 675^\circ \operatorname{cosec} 280^\circ - \operatorname{tg} 1845^\circ \sin 460^\circ$ ;  
b)  $\cos x \operatorname{tg} (180^\circ + x) \operatorname{tg} (270^\circ - x) \operatorname{cosec} (90^\circ - x)$ ;

c)  $\frac{\sin(\pi - x) \operatorname{tg} \left( x - \frac{\pi}{2} \right)}{\cos \left( \frac{3\pi}{2} + x \right) \operatorname{ctg} (\pi - x)}$ .

2. Dacă restul împărțirii numărului întreg  $k$  la 7 este unul din numerele 1, 3, 4, atunci:

$$\cos \left( k \cdot \frac{\pi}{7} - \frac{13\pi}{14} \right) + \cos \left( k \cdot \frac{3\pi}{7} - \frac{3\pi}{14} \right) + \cos \left( k \cdot \frac{5\pi}{7} - \frac{3\pi}{14} \right) = 0.$$

3. Să se studieze din punct de vedere al periodicității funcțiile: a)  $\operatorname{tg} 3x$ ;

b)  $\sqrt{\sin^2 x}$ ; c)  $x - \operatorname{tg} x$ ; d)  $\frac{\sin x - 1}{\cos x}$ ; e)  $\operatorname{ctg} \frac{1}{x}$ .

4. Să se determine perioadele funcțiilor: a)  $\sin^2 2x + \operatorname{ctg} 2x$ ; b)  $\sin 6x \cos 15x$ ;  
c)  $\sin 4x + \cos 6x + \operatorname{tg} 3x$ .

5. Să se determine perioada funcției  $f(x) = \sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$ .

6. Pentru ce valori întregi ale lui  $n$  funcția:  $\cos nx \sin \frac{5x}{n}$  are perioada  $3\pi$ ?

7. Să se demonstreze că funcția  $\cos \sqrt{x}$  nu este periodică.

8. Să se indice care din funcțiile următoare este pară sau impară:

a)  $x \sin^3 x$ ; b)  $\sqrt{\operatorname{tg}^2 x}$ ; c)  $x + \sin x$ ; d)  $|x| + \sin^2 x$ ; e)  $\sin^3 x + \cos^3 x$ .

9. Să se demonstreze că dacă suma:  $a_1 \cos(\alpha_1 + x) + a_2 \cos(\alpha_2 + x) + \dots + a_n \cos(\alpha_n + x)$  se anulează pentru  $x_1 = 0$  și  $x_2 = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), atunci ea se anulează pentru orice  $x$ .

10. Să se calculeze: a)  $\arccos\left[\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right]$ ; b)  $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)$ .
11. Să se demonstreze egalitățile: a)  $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$ ;  
b)  $\arctg\frac{1}{3} + \arctg\frac{1}{5} + \arctg\frac{1}{7} + \arctg\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ .
12. Să se calculeze suma:  $S_n = \arctg\frac{1}{2} + \arctg\frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \arctg\frac{1}{2n^2}$ .
13. Să se găsească relația dintre funcțiile:  $\arcsin \cos \arcsin x$  și  $\arccos \sin \arccos x$ .
14. Să se demonstreze că dacă  $\alpha < \frac{1}{23}$ , egalitatea  $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = \alpha \pi^3$  este imposibilă.
15. Să se determine domeniile valorilor funcțiilor: a)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ,  $x \in [2, 4]$ , b)  $f(x) = \sin x + \arcsin(\sin x)$ ,  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
16. Să se traseze graficul oscilației obținute prin compunerea oscilațiilor armonice simple:  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x$ ,  $y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x$ .
17. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \sin(\alpha - x) \sin(\alpha + x)$ , unde  $\alpha$  este un unghi constant și  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ .
18. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .
19. Să se traseze graficul funcției:  $f(x) = x - \arcsin(\sin x)$ .

### Maxime și minime trigonometrice

20. Să se determine minimele funcțiilor: a)  $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ ,  $x \in (0, \pi)$ ;  
b)  $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .
21. Produsul tangentelor a două arce pozitive, a căror sumă este constantă și mai mică decât  $\frac{\pi}{2}$ , crește dacă modulul diferenței acestor arce descrește.
22. Să se determine extremele funcției:  $U = \sin^2(x + y) \cos(x - y) + \sin^2(x - y) \cos(x + y)$ , dacă  $\sin^2 x + \sin^2 y = a$ , iar  $x, y$  sînt coordonatele unui punct situat în interiorul pătratului cu centrul în origine și unul din vîrfuri în punctul  $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ .
23. În mulțimea triunghiurilor cu aceeași bază și unghiurile de la vîrf egale să se găsească triunghiul cu perimetrul maxim.
24. Se consideră un semicerc de rază  $R$  și mulțimea triunghiurilor isoscele a căror bază conține diametrul, iar laturile egale sînt tangente semicercului. Să se determine triunghiul de arie minimă.
25. Să se determine dreptunghiul de arie maximă înscris într-un sector circular de rază  $R$  cu unghiul la centru  $2\alpha$ .
26. Un punct  $M$  se deplasează pe sfertul de cerc  $AB$  de centru  $O$  și de rază  $R$ . Să se determine poziția punctului  $M$ , astfel încît suma ariilor segmentelor subînținse de coardele  $MA$  și  $MB$  să aibă valori extreme.



27. Să se determine valoarea maximă a perimetrului unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza dată.
28. Se consideră două cercuri tangente în punctul  $A$ . Prin punctul de contact se duc în cercurile considerate două coarde formînd între ele un unghi dat  $\alpha$ . Să se determine poziția acestor coarde, astfel încît aria triunghiului, ale cărui vîrfuri sînt punctul  $A$  și extremitățile coardelor, să fie maximă.
29. Diagonalele unui patrulater înscris în cercul de rază  $R$  sînt perpendiculare și punctul lor de intersecție este situat la distanța  $d$  de centrul cercului. Să se determine maximul ariei acestui patrulater.
30. Un tablou este fixat pe perete astfel încît marginea lui de jos se află cu  $a$  metri, iar cea de sus cu  $b$  metri mai sus de ochiul observatorului. La ce distanță  $x$  de perete trebuie să se plaseze observatorul pentru a vedea tabloul sub un unghi maxim?
31. În mulțimea cilindrilor înscriși într-o sferă de rază  $R$  să se determine cilindrul a cărui arie totală este maximă.
32. Un triunghi dreptunghic se rotește în jurul ipotenuzei sale de lungime constantă  $a$ . Să se determine triunghiul pentru care volumul corpului de rotație generat este maxim.
33. Un triunghi isoscel, ale cărui laturi egale au lungimea constantă  $a$ , se rotește în jurul paralelei dusă prin vîrf la bază. Să se determine baza sa, astfel ca volumul corpului de rotație obținut să fie maxim.
34. Se consideră un cerc fix cu centrul în  $O$ . Fie  $A^1$  un punct fix de pe circumferință și  $OB$  o rază mobilă care formează unghiul  $2x$  cu  $OA$ . Să se determine  $x$  astfel încît aria laterală a corpului generat prin rotirea coardei  $AB$  în jurul razei  $OA$  să fie maximă.

## Formule fundamentale

### 1. Relații de bază:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (2)$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad (3)^*$$

$$\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha; \operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha. \quad (4)$$

### 2. Exprimarea funcțiilor trigonometrice cu ajutorul uneia din ele:

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sec \alpha$	$\operatorname{cosec} \alpha$
$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}{\sec \alpha}$	$\frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\cos \alpha$	$\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	$\cos \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$	$\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sec \alpha}$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}$	$\frac{1}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\pm \frac{\sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}{\operatorname{cosec} \alpha}$
$\sec \alpha$	$\frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\cos \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	$\frac{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$\sec \alpha$	$\frac{\operatorname{cosec} \alpha}{\pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}}$
$\operatorname{cosec} \alpha$	$\frac{1}{\sin \alpha}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}$	$\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}$	$\frac{\sec \alpha}{\pm \sqrt{\sec^2 \alpha - 1}}$	$\operatorname{cosec} \alpha$

**NOTĂ.** Semnul  $\pm$  pus înaintea radicalilor indică faptul că funcțiile trigonometrice pot avea și valori negative când unghiul este mai mare decât  $90^\circ$ .

\* Întrebuințarea lor avea de scop să ușureze calculele, înainte de a se descoperi logaritmi, deoarece transformă împărțirea prin *cosinus* și *sinus* într-o înmulțire cu *secanta* și *cosecanta*. În prezent nu se mai folosesc decât pentru a se scrie sub o formă mai simplă anumite relații trigonometrice.

### 3. Funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de unghiuri:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad (5)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta, \quad (6)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, \quad (7)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (9)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (12)$$

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma + \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma, \quad (13)$$

$$\cos(\alpha + \beta + \gamma) = \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha, \quad (14)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}, \quad (15)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \gamma}{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma - 1}, \quad (16)$$

### 4. Funcțiile trigonometrice ale multiplilor unui unghi: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$ (17)

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \quad (18)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (19)$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \quad (20)$$

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (3 - 4 \sin^2 \alpha), \quad (21)$$

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3), \quad (22)$$

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad (23)$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3 \operatorname{ctg} \alpha}{3 \operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}. \quad (24)$$

### 5. Funcțiile trigonometrice ale jumătății unui unghi:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (25)$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (26)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}, \quad (27)$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}. \quad (28)$$

Pentru funcțiile  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  și  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$  se folosesc uneori și alte formule:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad (27')$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (27'')$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (28')$$

sau:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}. \quad (28'')$$

6. Exprimarea funcțiilor trigonometrice ale unghiului  $\alpha$  cu ajutorul lui  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ :

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (29)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (30)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (31)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}. \quad (32)$$

*Observație.* Uneori trebuie să exprimăm funcțiile trigonometrice ale unui unghi cu ajutorul funcțiilor trigonometrice ale jumătății de unghi. Astfel, avînd în vedere că  $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$ , formulele (17) și (18) se pot scrie:

$$\sin \alpha = \sin 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (33)$$

$$\cos \alpha = \cos 2 \left( \frac{\alpha}{2} \right) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (34)$$

7. Formule pentru transformarea unor sume și diferențe de funcții trigonometrice în produs:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (35)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (36)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (37)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (38)$$

sau:

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \quad (38')$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin (\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad (39)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad (40)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin (\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad (41)$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}. \quad (42)$$

*Observație.* Tot pentru transformarea în expresii calculabile prin logaritmi pot servi formulele (25) și (26) scrise sub altă formă:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (43)$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad (44)$$

8. Formule pentru transformarea unor produse de funcții trigonometrice în sume:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)], \quad (45)$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)], \quad (46)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)], \quad (47)$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \quad (48)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}. \quad (49)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}. \quad (50)$$

9. Transformarea expresiei  $x = a \pm b$ , într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

Punem expresia dată sub forma:  $x = a \left( 1 \pm \frac{b}{a} \right)$ , deosebind următoarele cazuri: 1° Dacă  $0 < \frac{b}{a} < 1$  și este precedat de semnul  $-$ , putem nota  $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$ , de unde:

$$x = a(1 - \cos^2 \varphi) = a \sin^2 \varphi. \quad (51)$$

2° Dacă  $\left| \frac{b}{a} \right| < 1$  și precedat de semnul  $\pm$ , putem nota  $\frac{b}{a} = \cos \varphi$ , de unde:

$$a + b = a(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (52)$$

$$a - b = a(1 - \cos \varphi) = 2a \sin^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (53)$$

3° Oricare ar fi  $a$  și  $b$ , în cazul unei sume, putem nota  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ , de unde:

$$a + b = a(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}. \quad (54)$$

4° În orice situație putem nota:  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ , de unde:

$$a \pm b = a(1 \pm \operatorname{tg} \varphi) = \frac{a \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} \pm \varphi\right)}{\cos \varphi}. \quad (55)$$

10. Transformarea expresiei  $\sqrt{a^2 \pm b^2}$  într-o expresie calculabilă prin logaritmi.  
1° Expresia dată se poate scrie:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a| \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}. \text{ Notînd } \frac{b^2}{a^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi, \text{ obținem:}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = |a| \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = |a| |\sec \varphi| = \frac{|a|}{|\cos \varphi|}. \quad (56)$$

2° Presupunînd  $a > b$ , expresia dată se scrie:  $\sqrt{a^2 - b^2} = |a| \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ .

Notînd  $\frac{b^2}{a^2} = \cos^2 \varphi$ , obținem:

$$\sqrt{a^2 - b^2} = |a| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |a| |\sin \varphi|. \quad (57)$$

11. Transformarea expresiei  $\frac{a-b}{a+b}$  într-o expresie calculabilă prin logaritmi.

Împărțind prin  $a$  atât numărătorul cît și numitorul expresiei date și notînd  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ , obținem:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1 - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \varphi \right). \quad (58)$$

12. Transformarea expresiei  $a \sin \alpha \pm b \cos \alpha$  într-o expresie calculabilă prin logaritmi. Dînd pe  $a$  în factor și notînd  $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ , obținem:

$$\begin{aligned} a \left( \sin \alpha \pm \frac{b}{a} \cos \alpha \right) &= a \left( \sin \alpha \pm \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \cos \alpha \right) = \\ &= \frac{a}{\cos \varphi} (\sin \alpha \cos \varphi \pm \sin \varphi \cos \alpha) = \frac{a \sin (\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}. \end{aligned} \quad (59)$$

13. Să se transforme în expresii calculabile prin logaritmi rădăcinile ecuației de gradul II:  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Se consideră rădăcinile reale date de relația:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ .

Deosebim două cazuri: 1°  $\frac{c}{a} < 0$ . Radicalul se poate scrie:  $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$ .

Deoarece  $ac < 0$ , putem nota:  $-\frac{4ac}{b^2} = \operatorname{tg}^2 \varphi$ , de unde  $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sec \varphi$ .

Formula dată devine:  $x_{1,2} = \frac{-b \pm b \sec \varphi}{2a} = -\frac{b}{2a} \left( 1 \mp \frac{1}{\cos \varphi} \right) = -\frac{b(\cos \varphi \mp 1)}{2a \cos \varphi}$ .



deci:

$$x_1 = \frac{b}{2a} \left( \frac{1 - \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{b \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a \cos \varphi} \quad (60)$$

și

$$x_2 = -\frac{b}{2a} \left( \frac{1 + \cos \varphi}{\cos \varphi} \right) = -\frac{b \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{a \cos \varphi}. \quad (61)$$

$2^\circ \frac{c}{a} > 0$  cu  $b^2 - 4ac > 0$ . Avem:  $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}}$ .

Deoarece  $b^2 > 4ac$ , putem nota  $\frac{4ac}{b^2} = \sin^2 \varphi$ .

Deci  $\pm \sqrt{b^2 - 4ac} = \pm b \cos \varphi$ . Rădăcinile devin:

$$x_1 = \frac{-b + b \cos \varphi}{2a} = -\frac{b}{2a} (1 - \cos \varphi) = -\frac{b}{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (62)$$

$$x_2 = \frac{-b - b \cos \varphi}{2a} = -\frac{b}{2a} (1 + \cos \varphi) = -\frac{b}{a} \cos^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (63)$$

## Exerciții și probleme rezolvate

### A. Aplicații ale formulelor 1-4

1. Știind că  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  și că  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  sau că  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ , să se găsească  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Soluție. a) Aplicăm formula  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ , și deci

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25 - 16}{25}} = \frac{3}{5}.$$

În fața radicalului s-a luat semnul plus deoarece cosinusul este pozitiv în cadranul I:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{4}{3}.$$

Deci  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  și  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$ .

b) Din formula  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , deducem  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \text{deci } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}.$$

Atât cosinusul cât și tangenta sînt negative în cadranul II.

2. Dacă  $\alpha$  este unghi în cadranul III și  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , să se calculeze celelalte funcții trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ .

*Soluție.* Din formula  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ , deducem  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \text{ deci } \dots \operatorname{tg} \alpha = 1;$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}, \text{ deci } \dots \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \text{ deci } \dots \sec \alpha = -\sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \text{ deci } \dots \operatorname{cosec} \alpha = -\sqrt{2}.$$

**3. Fiind dat  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ , să se găsească  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ .**

*Soluție.* Știind că:  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  și  $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$  (v. formulele 4),

rezultă că: 
$$\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + \frac{9}{16}} = \pm \frac{5}{4},$$

deci: 
$$\sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \text{ și } \cos \alpha = \pm \frac{4}{5}.$$

În general, dacă se dă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$ , putem scrie:  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{m}{n}$

sau: 
$$\frac{\sin \alpha}{m} = \frac{\cos \alpha}{n} = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}}{\sqrt{m^2 + n^2}} = \frac{1}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}},$$

de unde: 
$$\sin \alpha = \frac{m}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}} \text{ și } \cos \alpha = \frac{n}{\pm \sqrt{m^2 + n^2}}.$$

**4. Știind că  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$  și că  $\alpha$  este un unghi din cadranul IV, să se găsească  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ .**

*Soluție.* Aplicăm formulele:

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}} \text{ și } \cos \alpha = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}.$$

Calculăm mai întâi  $\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \pm \sqrt{1 + \frac{1}{9}} = \pm \frac{\sqrt{10}}{3}.$

Înlocuind în formule și ținând cont că sinusul este negativ și cosinusul este pozitiv în cadranul IV, obținem:

$$\sin \alpha = -\frac{3 \sqrt{10}}{10} \text{ și } \cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

**5. Fiind dat  $\sin \alpha = \frac{a-b}{a+b}$ , în care  $0 < b < a$ , să se calculeze toate funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ .**

*Soluție.* a)  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ ,

$$\text{deci } \cos^2 \alpha = 1 - \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{(a+b)^2} = \frac{4ab}{(a+b)^2},$$

$$\text{deci: } \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{ab}}{a+b};$$

b)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ ,

$$\text{deci } \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{a-b}{2\sqrt{ab}};$$

c)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ ,

$$\text{deci } \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{2\sqrt{ab}}{a-b};$$

d)  $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ ,

$$\text{deci } \sec \alpha = \pm \frac{a+b}{2\sqrt{ab}};$$

e)  $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$ ,

$$\text{deci } \operatorname{cosec} \alpha = \frac{a+b}{a-b}.$$

6. Se dă  $\operatorname{tg} \alpha = 2,4$ . Să se calculeze celelalte funcții trigonometrice,  $\alpha$  fiind un unghi în cadranul III.

*Soluție.*  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$ , deci  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{2,4} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$ ;

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}, \text{ deci } \cos \alpha = \frac{1}{-\sqrt{1 + (2,4)^2}} = \\ &= \frac{1}{-\sqrt{6,76}} = -\frac{1}{2,6} = -\frac{5}{13}; \end{aligned}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}, \text{ deci } \sin \alpha = \frac{1}{-\sqrt{\frac{169}{144}}} = -\frac{12}{13}.$$

7. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - 1}.$$

*Soluție.*  $E = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{-(1 - \sin \alpha)} = \frac{(1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)}{-(1 - \sin \alpha)} = -(1 + \sin \alpha).$

8. Să se restrângă expresiile:

$$E_1 = \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \text{ și } E_2 = \sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

*Soluție.*  $E_1 = \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \cos^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned} E_2 &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = \\ &= \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

9. Să se arate că expresia:

$$E = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha)}} + \frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha)}} \right]$$

este independentă de unghiul  $\alpha$ .

*Soluție.*  $1 - \sin^2 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) = 1 - (1 - \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \alpha) = 1 - (1 - \cos^4 \alpha) = \cos^4 \alpha$ ,  
 $1 - \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha) = \sin^4 \alpha$ .

Înlocuind, rezultă:  $E = \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \left( \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  
deci  $E = 1$ .

**10. Să se stabilească identitatea:**  $\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \sec^2 \alpha \operatorname{cosec}^2 \alpha$ .

*Soluție.* Avem:

$$\sec^2 \alpha + \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$$

și:

$$\sec^2 \alpha \cdot \operatorname{cosec}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

**11. Să se demonstreze relația:**  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha$ .

*Soluție.* Aplicând formula  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , avem:

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \alpha = \sin^2 \alpha + \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

**12. Să se verifice identitatea;**  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \sin \alpha + \cos \alpha$ .

*Soluție.* Transformând mai întâi fracția a doua, avem:

$$\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - 1} = \frac{\cos^2 \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

$$\text{deci: } \frac{\sin^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha.$$

*Observație.* Analizând identitatea propusă, observăm că în timp ce membrul drept are sens pentru toate valorile lui  $\alpha$ , membrul stâng nu are sens pentru valorile lui  $\alpha$  care anulează numitorii celor două fracții. De exemplu, valorile  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{5\pi}{4}$ ;  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) conduc la operații fără sens.

**13. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:**

$$E(\alpha) = \left( \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \right) \left( \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} \right).$$

*Soluție.* Știind că  $|\sin \alpha| \leq 1$  și  $|\cos \alpha| \leq 1$ , putem aplica regulile de operații cu radicali, expresiile de sub radicali nefiind negative.

Astfel:

$$\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{(1 - \sin \alpha) - (1 + \sin \alpha)}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} = -\frac{2 \sin \alpha}{|\cos \alpha|}.$$

$$\text{Analog: } \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = -\frac{2 \cos \alpha}{|\sin \alpha|}.$$

$$\text{Rezultă: } E(\alpha) = \frac{4 \sin \alpha \cos \alpha}{|\cos \alpha| |\sin \alpha|} = 4 \frac{\sin \alpha}{|\sin \alpha|} \cdot \frac{\cos \alpha}{|\cos \alpha|}.$$

*Observație.* Pentru unghiurile  $\alpha$  a căror latură finală se găsește în cadranele I sau II, avem  $\sin \alpha > 0$  și deci  $|\sin \alpha| = \sin \alpha$ ; pentru unghiurile  $\alpha$  a căror latură finală se găsește în cadranele III sau IV, avem  $\sin \alpha < 0$  și deci  $|\sin \alpha| = -\sin \alpha$ .

Pentru unghiurile  $\alpha$  a căror latură finală se găsește în cadranele I sau IV,  $|\cos \alpha| = \cos \alpha$ , iar pentru cele din cadranele II sau III, avem  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$ .

$$E(\alpha) = \begin{cases} 4, & \text{dacă } \alpha \in \left(2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ -4, & \text{dacă } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right), \\ 4, & \text{dacă } \alpha \in \left((2k+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right), \\ -4, & \text{dacă } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, (2k+1)\pi\right). \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

### B. Aplicații ale formulelor 5—16

14. Să se calculeze valorile funcțiilor trigonometrice ale unghiului  $\alpha = 75^\circ$ .

*Soluție.* Aplicăm formulele (5) și (7):

$$\sin 75^\circ = \sin (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + \sqrt{3});$$

$$\cos 75^\circ = \cos (45^\circ + 30^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1);$$

$$\operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}; \quad \operatorname{ctg} 75^\circ = 2 - \sqrt{3}; \quad \sec 75^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} 75^\circ = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

15. Fiind date  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$  și  $\cos \beta = \frac{13}{14}$  ( $\alpha$  și  $\beta$  fiind unghiuri ascuțite și pozitive), să se arate că:

$$\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}.$$

*Soluție.* Pentru a aplica formula (8), calculăm mai întâi:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \quad \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \frac{3\sqrt{3}}{14}.$$

$$\text{Înlocuind, obținem: } \cos (\alpha - \beta) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2}.$$

Pe de altă parte  $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , deci  $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$ . Rezultă:  $\alpha - \beta = \frac{\pi}{3}$ .

16. Fiind date  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$  și  $\sin \beta = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ , se cere  $\sin (\alpha - \beta)$ , precum și expresia generală a unghiului  $\alpha - \beta$ .

*Soluție.* Calculăm mai întâi pe  $\cos \alpha$  și  $\cos \beta$ :

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos \beta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Aplicăm formula (6):  $\sin(\alpha - \beta) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ , de unde:

$$\sin(\alpha - \beta) = \begin{cases} \pm \frac{1}{2}, \\ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{cases}$$

Deci, soluțiile ar putea fi:  $\alpha - \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6}$ , (1)

$$\alpha - \beta = (2k + 1)\pi \mp \frac{\pi}{6}, \quad (2)$$

$$\alpha - \beta = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad (3)$$

$$\alpha - \beta = (2k + 1)\pi \mp \frac{\pi}{3}. \quad (4)$$

Ținând seama de faptul că în afară de  $\alpha - \beta$  cunoaștem și pe  $\sin \alpha$  și pe  $\sin \beta$ , numai valorile (1) și (4) convin problemei. În adevăr, din relațiile date, găsim:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2k\pi + \frac{\pi}{4}; & \beta &= 2k\pi + \frac{\pi}{12}; \\ \alpha &= 2k\pi + \frac{3\pi}{4}; & \beta &= 2k\pi + \frac{11\pi}{12}. \end{aligned}$$

Făcând diferența  $\alpha - \beta$  în toate modurile, constatăm cele afirmate.

17. Să se calculeze suma  $\alpha + \beta$ , știind că:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2m-1}{\sqrt{3}}$  și  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2-m}{m\sqrt{3}}$  ( $m \neq 0$ ;  $m \in \mathbb{R}$ ).

*Soluție.* Aplicăm formula (9):  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2(m^2 - m + 1)}{m\sqrt{3}} \cdot \frac{3m}{2(m^2 - m + 1)} = \sqrt{3}$ ,

deci  $\alpha + \beta = k\pi + \frac{\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Observație.* Trinomul  $m^2 - m + 1$  are rădăcini complexe.

18. Să se demonstreze identitatea:  $\frac{2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ .

*Soluție.* Aplicând formulele (7) și (8) obținem:  $\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$ .

Deci, membrul stâng devine:  $\frac{2 \sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ .

Înlocuind tangentele prin sinus și cosinus, în membrul drept, și aplicând formula (5), obținem:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

*Observație.* În membrul stâng la numitor s-a putea aplica direct formula de transformare a unei sume în produs. De asemenea, și în membrul drept.

19. Să se arate că expresia:  $E = \frac{\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta)}$  nu depinde de unghiul  $\alpha$ .

*Soluția 1°.* Observăm că:  $\sin(\alpha + \beta) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(\alpha + \beta) = \sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin \beta$ ,  
 $\cos(\alpha + \beta) \cos \alpha + \sin \alpha \sin(\alpha + \beta) = \cos[(\alpha + \beta) - \alpha] = \cos \beta$ , deci  $E = \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \operatorname{tg} \beta$ .

*Soluția 2°.* Se înlocuiesc  $\sin(\alpha + \beta)$  și  $\cos(\alpha + \beta)$ , aplicând formulele (5) și (7), se efectuează calculele și se ajunge la același rezultat.

## Să se verifice identitățile :

**20.**  $\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(\alpha - \beta) \cos \alpha \cos \beta = \sin^2 \alpha$ .

*Soluție.* Avem:

$$\cos^2(\alpha - \beta) + \cos^2 \beta - 2 \cos(\alpha - \beta) \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha - \beta) [\cos(\alpha - \beta) - 2 \cos \alpha \cos \beta] + \cos^2 \beta = -\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) + \cos^2 \beta = -(\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta) + \cos^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha.$$

**21.**  $\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta)$ .

*Soluție.* Putem verifica identitatea lucrând fie numai în membrul sting, fie numai în membrul drept, fie simultan în ambii membri.

Alegem prima cale:

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \cos \beta (\cos \alpha + \sin \alpha) + \sin \beta (\cos \alpha + \sin \alpha) = (\cos \alpha + \sin \alpha)(\cos \beta + \sin \beta).$$

**22.**  $\cos \alpha \sin(\beta - \gamma) + \cos \beta \sin(\gamma - \alpha) + \cos \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0$ .

*Soluție.*  $\cos \alpha (\sin \beta \cos \gamma - \cos \beta \sin \gamma) + \cos \beta (\sin \gamma \cos \alpha - \cos \gamma \sin \alpha) + \cos \gamma (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) = \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha + \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha - \gamma \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta = 0$ .

**23.** Să se calculeze  $\sin(\alpha + \beta - \gamma)$ , cunoscând:  $\sin \alpha$ ,  $\sin \beta$ ,  $\sin \gamma$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$ ,  $\cos \gamma$ .

*Soluția 1°.* Notînd  $\beta - \gamma = u$ , avem succesiv:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta - \gamma) &= \sin(\alpha + u) = \sin \alpha \cos u + \sin u \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos(\beta - \gamma) + \sin(\beta - \gamma) \cos \alpha \\ &= \sin \alpha (\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma) + (\sin \beta \cos \gamma - \sin \gamma \cos \beta) \cos \alpha; \\ \sin(\alpha + \beta - \gamma) &= \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \beta \cos \alpha \cos \gamma - \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

*Soluția 2°.* Se aplică direct formula (13), ținînd seama că  $\sin(-\gamma) = -\sin \gamma$ .

Știînd că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se verifice identitățile.

**24.**  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ .

*Soluție.* Deoarece  $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\operatorname{tg} \gamma$ .

Aplicînd formula (9), obținem:  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = -\operatorname{tg} \gamma$ ,

de unde:  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma$ .

**25.**  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ .

*Soluția 1°.* Condiția dată se poate scrie:  $\alpha + \beta = \pi - \gamma$ ,

deci:  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\pi - \gamma)$ ,

de unde:  $\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = -\cos \gamma$ .

Izolînd termenul în sinus și ridicînd la pătrat ambii membri ai egalității, obținem succesiv:

$$\cos \alpha \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos^2 \gamma &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = (1 - \cos^2 \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = \\ &= 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Și, în definitiv:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1, \text{ c.c.t.d.}$$

*Soluția 2°.*

$$\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 + \cos 2\beta}{2} + \cos^2(\alpha + \beta) - 2\cos\alpha \cos\beta \cos(\alpha + \beta) = 1 + \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) + \\ + \cos^2(\alpha + \beta) - [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \cdot \cos(\alpha + \beta) = 1 + \cos(\alpha + \beta) [\cos(\alpha - \beta) + \\ + \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)] = 1.$$

$$26. \sin^2(\alpha + \beta + \gamma) - [\sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma] \cdot [\sin(\alpha + \beta + \gamma) - \\ - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma] = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma.$$

*Soluție.*  $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin[(\alpha + \beta) + \gamma] = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \sin \gamma \cdot \cos(\alpha + \beta)$ ,  
 $\sin(\alpha + \beta + \gamma) = \sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cdot \sin \beta \sin \gamma$ , de unde:

$$\sin(\alpha + \beta) \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma = \sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

$$\text{Înlocuind, obținem: } \sin^2(\alpha + \beta + \gamma) - [\sin(\alpha + \beta + \gamma) + \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma] [\sin(\alpha + \\ + \beta + \gamma) - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma] = \sin^2(\alpha + \beta + \gamma) - \sin^2(\alpha + \beta + \gamma) + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma = \\ = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma.$$

### C. Aplicații ale formulelor 17—34

$$27. \text{Știind că } \sin \alpha = \frac{4}{5} \text{ și } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ să se calculeze: } \sin 2\alpha, \cos 2\alpha \text{ și } \operatorname{tg} 2\alpha.$$

*Soluție.* Aplicăm formulele (17), (18), (19):

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha, \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Având nevoie de  $\cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ , le deducem cu ajutorul formulelor (1) și (2):

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \text{ și } \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Și, în definitiv, obținem: } \sin 2\alpha = \frac{24}{25}; \cos 2\alpha = -\frac{7}{25}; \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$$

$$28. \text{Să se găsească } \sin \alpha, \cos \alpha \text{ și } \operatorname{tg} \alpha, \text{ știind că: } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2} - 1.$$

$$\text{Soluție. Aplicăm formulele (29), (30) și (31): } \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = 1.$$

$$29. \text{Să se calculeze } \sin 15^\circ, \cos 15^\circ \text{ și } \operatorname{tg} 15^\circ, \text{ știind că: } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Soluție. Aplicăm formulele (25), (26) și (27): } \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4},$$



**Observație.** În fața radicalilor s-a luat semnul  $+$ , deoarece  $\frac{\alpha}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**30. Știind că  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .**

**Soluție.** Notăm  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x$ . Aplicăm formula (29):  $\sin \alpha = \frac{2x}{1+x^2}$  sau  $x^2 \sin \alpha - 2x + \sin \alpha = 0$ ,

de unde:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}.$$

Dar:  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  și  $\sin^2 \alpha = \frac{3}{4}$ , deci:  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \pm 1}{\sqrt{3}} = \begin{matrix} \nearrow \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \searrow \frac{\sqrt{3}}{3} \end{matrix}$ .

**Observație.** Deoarece  $1 - \sin^2 \alpha \geq 0$ , rădăcinile sînt totdeauna reale.

**31. Știind că  $\cos \alpha = \frac{1}{9}$  și că  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ , să se calculeze:  $\sin \frac{\alpha}{2}$  și  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .**

**Soluție.** Observăm că  $\frac{\alpha}{2} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ , deci:  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$  și  $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$ .

Aplicăm formulele (25) și (26):  $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = \frac{2}{3}$  și  $\cos \frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**32. Fiind dat  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ , să se calculeze  $\sin 4\alpha$ .**

**Soluție.** Știind că:  $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ;  $\cos \alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$ ;  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,

deducem:

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{4 \operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}.$$

Înlocuind, obținem:

$$\sin 4\alpha = -\frac{24}{25}.$$

**33. Știind că  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$ , să se calculeze expresia:  $E = m \sin 2\alpha + n \cos 2\alpha$ .**

**Soluție.**  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$  și  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ . Înlocuind în  $E$ , obținem:

$$E = m \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} + n \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = m \frac{\frac{2m}{n}}{1 + \frac{m^2}{n^2}} + n \frac{1 - \frac{m^2}{n^2}}{1 + \frac{m^2}{n^2}},$$

$$E = \frac{2m^2 n}{m^2 + n^2} + \frac{n(n^2 - m^2)}{m^2 + n^2} = n.$$

**34.** Să se exprime  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$  în funcție de  $\operatorname{tg} \alpha$  și să se discute formula obținută după cum unghiul  $\alpha$  este situat în unul din cele patru cadrane.

*Soluție.* Aplicăm formula (10): 
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Din formula (31):  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ , rezultă:  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \alpha = 0$ , deci:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Ținând seama de aceste valori, avem:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}}{1 + \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + 1 \mp \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}{\operatorname{tg} \alpha - 1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

Raționalizând numitorul, obținem:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$

*Discuție.* Vom lua:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha,$

dacă latura finală a unghiului  $\alpha$  este în cadranul I sau III și  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = -\operatorname{tg} \alpha - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,  
dacă latura finală a unghiului  $\alpha$  este în cadranul II sau IV.

**35.** Știind că  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$  și că  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ , să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

*Soluție.* Notînd  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = m$ , avem:  $\sin \alpha = \frac{2m}{1 + m^2}$  și  $\cos \alpha = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}.$

Înlocuind în relația dată, obținem:  $6m^2 - 5m + 1 = 0$ , de unde:  $m_1 = \frac{1}{3}$  și  $m_2 = \frac{1}{2}.$

Rezultă pentru  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  două valori. O vom alege pe aceea pentru care  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$  sau

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \in (0, \operatorname{tg} 22^\circ 30'). \text{ Aplicînd formula (27), găsim: } \operatorname{tg} 22^\circ 30' = \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,414.$$

Dar

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} = 0,333... \text{ și } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Comparînd rezultatele obținute, reținem:  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}.$

**36.** Fiind dată valoarea lui  $\sin \alpha$ , se cer funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\frac{\alpha}{2}.$

*Soluție. Avem:*

$$2 \sin \beta \cos \beta = \sin 2\beta,$$

$$\cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1.$$

Adunând sau scăzând aceste relații, obținem:  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta + 2 \sin \beta \cos \beta = 1 + \sin 2\beta$ .

și:  $\cos^2 \beta + \sin^2 \beta - 2 \sin \beta \cos \beta = 1 - \sin 2\beta$ .

sau:  $(\cos \beta + \sin \beta)^2 = 1 + \sin 2\beta,$

de unde:  $(\cos \beta - \sin \beta)^2 = 1 - \sin 2\beta,$

$$\cos \beta + \sin \beta = \pm \sqrt{1 + \sin 2\beta},$$

$$\cos \beta - \sin \beta = \pm \sqrt{1 - \sin 2\beta}.$$

Luând:  $\beta = \frac{\alpha}{2}$ , avem:

$$\begin{cases} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha}, \\ \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 - \sin \alpha}. \end{cases} \quad (1)$$

Adunând și scăzând aceste relații, obținem formulele:

$$2 \cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \pm \sqrt{1 - \sin \alpha};$$

$$2 \sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{1 + \sin \alpha} \mp \sqrt{1 - \sin \alpha}, \quad (2)$$

care ne dau valorile lui  $\cos \frac{\alpha}{2}$  și  $\sin \frac{\alpha}{2}$ , când se cunoaște  $\sin \alpha$ .

*Notă.* Semnele din fața radicalilor se iau în felul următor: se observă cum stau, una față de cealaltă funcțiile  $\cos \frac{\alpha}{2}$  și  $\sin \frac{\alpha}{2}$  și se iau în fața radicalilor  $\sqrt{1 + \sin \alpha}$  și  $\sqrt{1 - \sin \alpha}$ , semnele ce le au expresiile  $\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}$  și  $\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}$ , relațiile (1).

*Exemple. a)* Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului  $15^\circ$ , știind că  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ .

*Soluție.* Observăm că  $\sin 15^\circ < \cos 15^\circ$ , amândouă fiind pozitive; deci:  $\cos 15^\circ + \sin 15^\circ > 0$  și  $\cos 15^\circ - \sin 15^\circ > 0$ .

Trebuie deci ca în relațiile (1), în fața radicalilor să luăm semnul  $+$ .  
Astfel:

$$\cos 15^\circ + \sin 15^\circ = \sqrt{1 + \sin 30^\circ} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}},$$

$$\cos 15^\circ - \sin 15^\circ = \sqrt{1 - \sin 30^\circ} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}},$$

de unde:  $\cos 15^\circ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{6} + \sqrt{2})$

și:  $\sin 15^\circ = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{4} (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$

*b)* Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale unghiului  $175^\circ$ , când se cunoaște  $\sin 350^\circ$ .

*Soluție.* Unghiul de  $175^\circ$  este în cadranul II. Deci:

$\sin 175^\circ > 0$  și  $\cos 175^\circ < 0$ , iar  $|\cos 175^\circ| > |\sin 175^\circ|$ .

Rezultă:  $\cos 175^\circ + \sin 175^\circ < 0$  și  $\cos 175^\circ - \sin 175^\circ < 0$ .

Astfel, în formulele (1) vom lua în fața radicalilor semnul  $-$ .

$$\text{Avem: } \cos 175^\circ + \sin 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ},$$

$$\cos 175^\circ - \sin 175^\circ = -\sqrt{1 - \sin 350^\circ},$$

de unde:

$$2 \cos 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ} - \sqrt{1 - \sin 350^\circ},$$

$$2 \sin 175^\circ = -\sqrt{1 + \sin 350^\circ} + \sqrt{1 - \sin 350^\circ} \text{ etc.}$$

**37. Fiind dat  $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$ , să se găsească  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ .**

**Să se explice rezultatul.**

$$\text{Soluție. } \cos 2\alpha = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{576}{49}}} = \pm \frac{7}{25},$$

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} \text{ și } \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}.$$

$$\text{Pentru } \cos 2\alpha = \frac{7}{25} \text{ obținem } \sin \alpha = \pm \frac{3}{5} \text{ și } \cos \alpha = \pm \frac{4}{5};$$

$$\text{pentru } \cos 2\alpha = -\frac{7}{25} \text{ obținem: } \sin \alpha = \pm \frac{4}{5} \text{ și } \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}.$$

**Discuție.** Fie  $a$  cel mai mic unghi pozitiv a cărui tangentă este egală cu  $-\frac{24}{7}$ ; celelalte sînt date de relația  $2\alpha = k\pi + a$ .

$$\text{Deci: } \sin \alpha = \sin \frac{1}{2}(k\pi + a) \text{ și } \cos \alpha = \cos \frac{1}{2}(k\pi + a).$$

Toate valorile acestor două expresii se obțin dînd lui  $k$  valorile: 0, 1, 2, 3.

$$\text{Găsim pentru } \sin \alpha \text{ valorile: } \sin \frac{a}{2}; \cos \frac{a}{2}; -\sin \frac{a}{2}; -\cos \frac{a}{2},$$

$$\text{iar pentru } \cos \alpha \text{ valorile: } \cos \frac{a}{2}; -\sin \frac{a}{2}; -\cos \frac{a}{2}; \sin \frac{a}{2}.$$

**38. Să se verifice identitatea:  $\sin 2\alpha = (1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha$ .**

**Soluție.** Aplicăm formula  $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$ . Avem:

$$(1 - \cos 2\alpha) \operatorname{ctg} \alpha = 2 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha.$$

**39. Să se verifice identitatea:  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .**

**Soluție.** Avem:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha(1 + \cos \alpha)} = \frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

**40. Să se verifice identitatea:  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2 \operatorname{tg} 2\alpha$ .**

$$\begin{aligned} \text{Soluție. Avem: } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) &= \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = \\ &= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 - (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} = 2 \operatorname{tg} 2\alpha. \end{aligned}$$

41. Să se verifice identitatea:  $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \cos 2\alpha$ .

Soluție. Aplicând formula (19), avem:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha} &= \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{1}{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)}{\operatorname{tg} \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

42. Să se verifice identitatea:  $\frac{\operatorname{cosec}^2 \alpha - \sec^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} = \cos 2\alpha$ .

Soluție. Aplicând formulele (4) și înlocuind în membrul stâng, obținem:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha)} &= \frac{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}} = \frac{\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} \cdot \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \\ &= \cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \cos 2\alpha. \end{aligned}$$

43. Să se verifice identitatea:  $\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Soluție. Avem: } (\operatorname{tg} 3\alpha - \operatorname{tg} \alpha) - \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha = \\ &= \frac{\sin 3\alpha \cos \alpha - \sin \alpha \cos 3\alpha}{\cos 3\alpha \cos \alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin(3\alpha - \alpha)}{\cos 3\alpha \cos \alpha} - \operatorname{tg} 2\alpha = \\ &= \frac{\sin 2\alpha}{\cos 3\alpha \cos \alpha} - \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{\sin 2\alpha[\cos(3\alpha - \alpha) - \cos 3\alpha \cos \alpha]}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = \frac{\sin 2\alpha(\cos 3\alpha \cos \alpha + \sin 3\alpha \sin \alpha - \cos 3\alpha \cos \alpha)}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = \\ &= \frac{\sin \alpha \sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\cos \alpha \cos 2\alpha \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 3\alpha. \end{aligned}$$

44. Să se verifice identitatea:  $\sin 3\alpha \sin^3 \alpha + \cos 3\alpha \cos^3 \alpha = \cos^3 2\alpha$ .

Soluție. Notăm membrul stâng cu  $A$  și aplicăm formulele:

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \text{ și } \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha:$$

$$A = 4(\cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha) - 3(\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha),$$

$$A = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) [4(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) - 3(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)],$$

$$A = \cos 2\alpha \{4[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha] - 3\},$$

$$A = \cos 2\alpha(1 - 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) = \cos 2\alpha(1 - \sin^2 2\alpha).$$

$$A = \cos^3 2\alpha.$$

45. Să se verifice identitatea:  $\frac{2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}$ .

Soluție. Eliminăm numitorii și grupăm convenabil termenii:

$$4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 2\alpha = \operatorname{tg}^2 2\alpha + \operatorname{tg}^2 2\alpha \cdot \operatorname{tg}^4 \alpha, \operatorname{tg}^2 2\alpha(1 - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^4 \alpha) = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

sau:  $\operatorname{tg}^2 2\alpha(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha)^2 = 4 \operatorname{tg}^2 \alpha$ , de unde:  $\operatorname{tg}^2 2\alpha = \left(\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\right)^2$ , adică tocmai o formulă cunoscută (19).

Observație. Urmind calea inversă, stabilim identitatea propusă.

46. Să se verifice identitatea:  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha = 2 \frac{3 + \cos 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha}$ .

Soluția 1°. Știm că:  $2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 2$ .

Adunând membru cu membru cele două egalități, obținem:  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 =$   
 $= 2 \left( 1 + \frac{3 + \cos 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha} \right)$

sau:  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{8}{1 - \cos 4\alpha}$ . Dar:  $\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha$ . Înlocuind,

avem:  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \frac{4}{\sin^2 2\alpha}$ , sau:  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 = \left( \frac{2}{\sin 2\alpha} \right)^2$ .

Dar:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  și  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

Înlocuind, obținem:  $\left( \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} \right)^2 = \left( \frac{2}{\sin 2\alpha} \right)^2$  și, în definitiv:

$$\left( \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} \right)^2 = \left( \frac{2}{\sin 2\alpha} \right)^2 \text{ egalitate evidentă.}$$

Soluția 2°. Știm că:  $\cos 4\alpha = 1 - 2 \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}$ .

Înlocuind în membrul drept al egalității, obținem:

$$2. \frac{4 - \frac{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}{(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^2}}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha,$$

rezultat identic cu membrul stâng.

47. Să se arate că expresia:

$$E = \frac{\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}}$$

nu depinde de  $\alpha$ .

Soluție. Aplicând formula:  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ , rezultă:

$$E = \frac{\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}}{1 + \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha}} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - (1 - \cos \alpha)(1 - \sin \alpha)}{\sin \alpha(1 - \sin \alpha) + \cos \alpha(1 - \cos \alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha - 1} = 1.$$

#### D. Aplicații ale formulelor 35—63

48. Să se calculeze trigonometric expresia:  $E = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ .

Soluție. Se știe că  $\sqrt{2} = 2 \sin 45^\circ$  și  $\sqrt{3} = 2 \sin 60^\circ$ , deci:  $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 2(\sin 45^\circ + \sin 60^\circ)$ .

Aplicând formula (35), avem:  $E = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 4 \sin \frac{105^\circ}{2} \cos \frac{15^\circ}{2}$ .

49. Să se transforme în produs expresia:  $E = \sin 75^\circ - \sin 15^\circ$ .

Soluție. Aplicând formula (36), avem:  $E = 2 \sin \frac{75^\circ - 15^\circ}{2} \cos \frac{75^\circ + 15^\circ}{2} = 2 \sin 30^\circ \cos 45^\circ$ ,

Deci:  $E = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

50. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:  $E = (\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2$ .

Soluție. Aplicând în paranteze formulele (35) și (37), avem:

$$\begin{aligned} E &= \left( 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \left( 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 = \\ &= 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \left( \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \right). \end{aligned}$$

Rezultă:  $E = 4 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

51. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:  $E = \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2(\alpha - \beta)$ .

Soluție. Se observă că:  $E = [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)] [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$ .

Aplicând formulele (45) și (45'), avem:  $E = 2 \sin \alpha \cos \beta \cdot 2 \cos \alpha \sin \beta$ .

Rezultă:  $E = \sin 2\alpha \sin 2\beta$ .

52. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:  $E = \frac{\sin^2 7\alpha - \sin^2 4\alpha}{\cos^2 5\alpha - \cos^2 6\alpha}$ .

Soluție. Descompunând în factori și aplicând formulele (35), (36), (37), (38), avem:

$$\begin{aligned} E &= \frac{(\sin 7\alpha + \sin 4\alpha)(\sin 7\alpha - \sin 4\alpha)}{(\cos 5\alpha + \cos 6\alpha)(\cos 5\alpha - \cos 6\alpha)} = \\ &= \frac{2 \sin \frac{11\alpha}{2} \cos \frac{3\alpha}{2} \cdot 2 \cos \frac{11\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}{2 \cos \frac{11\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cdot 2 \sin \frac{11\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\cos \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{3\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha}{\sin \alpha} = 3 - 4 \sin^2 \alpha. \end{aligned}$$

Deci:  $E = 4 \cos^2 \alpha - 1$ .

53. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$E = 4 \sin \frac{\alpha}{3} \sin \frac{\pi + \alpha}{3} \sin \frac{\pi - \alpha}{3}.$$

Soluția 1°. Se observă că, aplicând formula (47), avem:

$$2 \sin \frac{\pi + \alpha}{3} \sin \frac{\pi - \alpha}{3} = \cos \frac{2\alpha}{3} - \cos \frac{2\alpha}{3} = \cos \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2}.$$

Deci:  $E = 2 \sin \frac{\alpha}{3} \left( \cos \frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2} \right) = 2 \sin \frac{\alpha}{3} \cos \frac{2\alpha}{3} + \sin \frac{\alpha}{3}.$

Aplicând formula (45), obținem:  $E = \sin \alpha - \sin \frac{\alpha}{3} + \sin \frac{\alpha}{3} = \sin \alpha$ .

*Soluția 2°.* Se observă că  $\sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3} = \sin \frac{\pi + \alpha}{3} \sin \frac{\pi - \alpha}{3}$ .

Deci:  $E = 4 \sin \frac{\alpha}{3} \left( \sin^2 \frac{\pi}{3} - \sin^2 \frac{\alpha}{3} \right) = 3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3}$ .

Știm însă că  $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ .

Rezultă:  $3 \sin \frac{\alpha}{3} - 4 \sin^3 \frac{\alpha}{3} = \sin \alpha$ .

**54. Să se arate că expresia:**

$$E = \frac{\sin \beta \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \cos (\alpha + \beta)} + \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

*este independentă de  $\alpha$  și  $\beta$ .*

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } \frac{\sin \beta \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta)}{1 - \cos (\alpha + \beta)} &= \frac{\sin \beta \cos \alpha}{2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} \cdot \frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \beta \cdot 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{2 \sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \beta} = \frac{\sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta}. \end{aligned}$$

$$\text{Deci: } E = \frac{\sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta} + \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \beta \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Deoarece  $\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta \right)$ .

$$\begin{aligned} \text{avem: } E &= \frac{\sin \left( \frac{\alpha + \beta}{2} - \beta \right) + \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta - \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \beta \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \beta} \end{aligned}$$

Rezultă:  $E = 1$ .

**55. Să se transforme în produs expresia:  $E = m + n \operatorname{tg} \alpha$ .**

*Soluție.*  $E = n \left( \frac{m}{n} + \operatorname{tg} \alpha \right)$ . Notînd  $\frac{m}{n} = \operatorname{tg} \beta$  și înlocuind obținem:

$$E = n (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) = \frac{n \sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = n \sec \alpha \sec \beta \sin (\alpha + \beta).$$



56. Să se transforme în produs expresia:  $E = m + n \sin \alpha$ .

*Soluție.*  $E = n \left( \frac{m}{n \cos \alpha} \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \right)$ .

Notînd  $\frac{m}{n \cos \alpha} = \operatorname{tg} \beta$  și înlocuind, obținem:  $E = n (\cos \alpha \operatorname{tg} \beta + \sin \alpha) = n \left( \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \beta} + \sin \alpha \right)$ .

Deci:  $E = \frac{n \sin (\alpha + \beta)}{\cos \beta} = n \sec \beta \sin (\alpha + \beta)$ .

57. Să se transforme în produs expresia:  $E = \sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$ .

*Soluție.* Aplicînd formula (35), avem:  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ ,

îar  $\sin (\alpha + \beta) = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Deci:  $E = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left[ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \right]$ .

În sfîrșit, aplicînd formula (37), obținem:  $E = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ .

58. Să se transforme în produs sau în cît expresia:  $E = 1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha$ .

*Soluția 1°.* Se știe că:  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$  și deci,  $E = \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha = \cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha) = 2 \cos \alpha \left( \frac{1}{2} + \cos \alpha \right)$ .

Dar

$$\frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3},$$

deci:

$$E = 2 \cos \alpha \left( \cos \frac{\pi}{3} + \cos \alpha \right).$$

Aplicînd formula (37), obținem:  $E = 4 \cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

*Soluția 2°.* Am văzut că:  $E = \cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)$ . Dar  $2 \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ ,

deci:  $1 + 2 \cos \alpha = \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ . Aplicînd formula (35), obținem:

$$1 + 2 \cos \alpha = \frac{2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}. \text{ Rezultă: } E = \frac{\cos \alpha \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

59. Presupunînd că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se transforme în produs expresia:  $E = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma$ .

*Soluție.* Deoarece  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ , avem:  $\sin \gamma = \sin (\alpha + \beta)$ .

Deci:  $E = \sin \alpha + \sin \beta + \sin (\alpha + \beta)$ .

Se obține:  $E = 4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$  (v. aplicația 57).

Observînd că  $\sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}$ , avem:  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ .

60. Să se transforme în produs expresia:  $E = 1 + \sin \alpha + \cos \alpha$ .

*Soluție.*

Înlocuind  $1 = \sin \frac{\pi}{2}$  și  $\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  avem:  $E = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \alpha + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

Observăm că:  $\frac{\pi}{2} + \alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$ .

Rezultă că putem aplica relația:

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \text{ (v. aplicația 59)}.$$

Deci:  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha = 4 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

**61. Să se verifice identitatea:**  $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma =$   
 $= 4 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n\gamma}{2}$ , știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , iar  $n = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

$$\begin{aligned} \text{Soluție. } \sin n\alpha + \sin n\beta &= 2 \sin \frac{n(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{n(\alpha - \beta)}{2} = 2 \sin \frac{n(\pi - \gamma)}{2} \cos \frac{n(\alpha - \beta)}{2} = \\ &= 2 \left[ \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\gamma}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n\gamma}{2} \right] \cos \frac{n(\alpha - \beta)}{2} = 2 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\gamma}{2} \cos \frac{n(\alpha - \beta)}{2}. \end{aligned}$$

Deoarece, conform condiției,  $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ , găsim:

$$\begin{aligned} \sin n\gamma &= 2 \sin \frac{n\gamma}{2} \cos \frac{n\gamma}{2} = 2 \sin \frac{n(\pi - \alpha - \beta)}{2} \cos \frac{n\gamma}{2} = \\ &= 2 \left[ \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n(\alpha + \beta)}{2} - \cos \frac{n\pi}{2} \sin \frac{n(\alpha + \beta)}{2} \right] \cos \frac{n\gamma}{2} = \\ &= 2 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{n\gamma}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Revenind: } \sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 2 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\gamma}{2} \left[ \cos \frac{n(\alpha - \beta)}{2} + \cos \frac{n(\alpha + \beta)}{2} \right].$$

Aplicând formula (37), obținem:  $\sin n\alpha + \sin n\beta + \sin n\gamma = 4 \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\alpha}{2} \cos \frac{n\beta}{2} \cos \frac{n\gamma}{2}$ ,  
 adică c.c.t.d.

**62. Să se transforme în produs expresia:**  $E = \sin \alpha + \cos \alpha + \sin \beta + \cos \beta +$   
 $+ 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

*Soluție.* Aplicând formulele (35) și (37), avem:

$$\begin{aligned} E &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \\ &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left[ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Notăm:  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$  și  $1 = \sin \frac{\pi}{2}$ .

Deci:  $E = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left[ \sin \frac{\alpha + \beta}{2} + \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) + \sin \frac{\pi}{2} \right]$ .

Observăm că în paranteză suma argumentelor este  $\pi$ :

$$\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Deci, putem aplica relația:  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ .

$$\begin{aligned} \text{Rezultă: } E &= 8 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\pi - \alpha - \beta}{4} \cos \frac{\pi}{4} = \\ &= 4 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{4} \cos \frac{\pi - (\alpha + \beta)}{4}. \end{aligned}$$

63. Să se transforme în produs suma:  $S = \cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma)$ .

Soluție. Aplicând formula (37), avem:  $\cos(\alpha + \beta + \gamma) + \cos(\alpha + \beta - \gamma) = 2 \cos(\alpha + \beta) \cos \gamma$ ,  $\cos(\alpha - \beta + \gamma) + \cos(-\alpha + \beta + \gamma) = 2 \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma$ .

Deci:  $S = 2 \cos \gamma [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ .

Aplicând formula (46), obținem:  $S = 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma$ .

64. Să se verifice identitatea:

$$\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)} + \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{2}{\sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Soluție. Aplicând formulele (35), (35'), (36), (37), membrul stâng al egalității devine:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta} &= \frac{\cos \beta (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \beta (\cos \alpha - \sin \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \\ &= \frac{2}{\sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta}, \text{ adică c.c.t.d.} \end{aligned}$$

65. Să se transforme în produs suma de sinusuri a  $n$  unghiuri în progresie aritmetică, adică:

$$S = \sin \alpha + \sin(\alpha + h) + \sin(\alpha + 2h) + \dots + \sin[\alpha + (n-1)h].$$

Soluție. Înmulțind cu  $2 \sin \frac{h}{2}$  ambii membri ai sumei, avem:

$$2S \sin \frac{h}{2} = 2 \sin \alpha \sin \frac{h}{2} + 2 \sin(\alpha + h) \sin \frac{h}{2} + \dots + 2 \sin[\alpha + (n-1)h] \sin \frac{h}{2}.$$

Dar fiecare produs de două sinusuri se poate înlocui prin diferența a două cosinusuri, aplicând formula 47. Deci:

$$2 \sin \alpha \sin \frac{h}{2} = \cos\left(\alpha - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{h}{2}\right),$$

$$2 \sin(\alpha + h) \sin \frac{h}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{3h}{2}\right),$$

$$2 \sin(\alpha + 2h) \sin \frac{h}{2} = \cos\left(\alpha + \frac{3h}{2}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{5h}{2}\right).$$

.....

$$2 \sin[\alpha + (n-1)h] \sin \frac{h}{2} = \cos\left[\alpha + \frac{(2n-3)h}{2}\right] - \cos\left[\alpha + \frac{(2n-1)h}{2}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Adunând membru cu membru, obținem: } 2S \sin \frac{h}{2} &= \cos\left(\alpha - \frac{h}{2}\right) - \cos\left[\alpha + \frac{(2n-1)h}{2}\right] \\ &= 2 \sin\left[\alpha + \frac{(n-1)h}{2}\right] \sin \frac{nh}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă: } S &= \frac{\sin\left[\alpha + \frac{(n-1)h}{2}\right] \cdot \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}} \end{aligned}$$

66. Știind că:  $\cos \alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  și  $\operatorname{tg} \beta = \frac{2t}{1-t^2}$ , unde  $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ,

să se calculeze  $\cos(\alpha - \beta)$ .

Soluție. Știm că  $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$ .

Dar:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\sin \beta = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{\frac{2t}{1-t^2}}{\sqrt{1 + \frac{4t^2}{(1-t^2)^2}}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Înlocuind, obținem:  $\cos(\alpha - \beta) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$ .

Observație. Rezultă:  $\alpha - \beta = 0$ , deci  $\alpha = \beta$ .

67. Știind că  $\sin \alpha + \cos \alpha = t$ , să se calculeze expresia:  $E = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$  în funcție de  $t$ .

Soluție.  $E = (\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha) = t(1 - \sin \alpha \cos \alpha)$ .

Dar:  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = t^2$ ,

de unde:  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$ .

Rezultă:  $E = \frac{t}{2}(3 - t^2)$ .

68. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se verifice identitatea:

$$\frac{\cos \beta + \cos \gamma - \sin \alpha}{\cos \gamma + \cos \alpha - \sin \beta} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Soluție.  $\cos \beta + \cos \gamma = 2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$ ,

deci:  $\cos \beta + \cos \gamma - \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\beta - \gamma}{2} - \cos \frac{\alpha}{2} \right) = -4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta - \gamma - \alpha}{4} \sin \frac{\beta - \gamma + \alpha}{4} = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)$ .

Procedând analog și la numitor, obținem:

$$\cos \gamma + \cos \alpha - \sin \beta = 4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right).$$

În definitiv, înlocuind, obținem:

$$\frac{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)}{4 \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

69. Să se verifice identitatea:  $\frac{\sin \alpha + \cos (2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin (2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$ .

Soluție. Știm că:  $\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  și  $\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ .

Înlocuind în membrul stâng, obținem succesiv:

$$\begin{aligned} & \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \cos (2\beta - \alpha)}{\sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) - \sin (2\beta - \alpha)} = \frac{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \beta - \alpha \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right)}{2 \cos \left( \frac{\pi}{4} + \beta - \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right)} = \\ & = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right)} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta} = \frac{(\cos \beta + \sin \beta)^2}{\cos^2 \beta - \sin^2 \beta} = \frac{1 + 2 \sin \beta \cos \beta}{\cos 2\beta} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}, \text{ c.c.t.d} \end{aligned}$$

70. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se verifice identitatea:

$$\frac{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}{\left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^2} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Soluție. } 2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta) = \frac{2 \sin (\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}},$$

$$\text{iar: } \left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^2 = \frac{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Rezultă: } \frac{2(\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta)}{\left( \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \right)^2} &= \frac{4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\sin^2 \frac{\alpha + \beta}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \end{aligned}$$

$$\text{deoarece: } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \frac{\gamma}{2} \text{ și } \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \cos \frac{\gamma}{2}.$$

71. Să se arate că, dacă  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  și dacă avem relația:  $\frac{1}{2} (\sin \alpha + \sin \gamma) = \sin \beta$ ,

avem și relația:  $3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1$ .

$$\text{Soluție. } \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}$$

$$\text{sau: } \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \gamma}{2},$$

$$\text{deci: } \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}, \text{ deoarece } \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} \neq 0$$

$$\text{sau: } \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$\text{Rezultă: } 3 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\text{și, în definitiv: } 3 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1.$$

**72.** Să se arate că, dacă avem  $\operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \beta$ , atunci există și relația:  $\sin \alpha \sin \beta = \pm \sin \frac{\pi}{4}$ .

*Soluție.* Înlocuind tangentele în funcție de sinus și cosinus, obținem:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} = 1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta},$$

$$\text{de unde: } \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + \sin^2 \beta \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta (1 - \sin^2 \alpha) = 1 - \sin^2 \alpha \sin^2 \beta.$$

$$\text{Rezultă: } 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = 1$$

$$\text{sau: } \sin \alpha \sin \beta = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \sin \frac{\pi}{4}.$$

**73.** Să se demonstreze inegalitatea:  $\left| \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right| \leq \sqrt{2}$ .

*Soluție.* Aplicând relațiile:  $\sin \alpha = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ ,  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$  etc., obținem:

$$\frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} = \frac{1 + \cos \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right)}{\cos \alpha + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)} = \frac{2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$\text{Dar: } \left| \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right| \leq 1.$$

$$\text{Rezultă: } \left| \frac{1 + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha} \right| = \sqrt{2} \left| \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right| \leq \sqrt{2}, \text{ c.c.t.d.}$$

**74.** Să se arate că, dacă  $0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ , atunci:  $\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \geq 1 + \operatorname{ctg} \varphi$ .

$$\text{Soluție.} \text{ Exprimând } \operatorname{ctg} \varphi \text{ prin } \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}, \text{ inegalitatea devine: } \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \geq 1 + \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{sau, ținând seama că } 2 \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} > 0: \left( \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} - 1 \right)^2 \geq 0, \text{ ceea ce este evident.}$$

$$\text{Egalitatea are loc pentru } \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} = 1, \text{ deci } \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

75. Să se demonstreze inegalitatea:  $\frac{\sin x - 1}{\sin x - 2} + \frac{1}{2} \geq \frac{2 - \sin x}{3 - \sin x}$ .

Soluție. Inegalitatea se poate scrie sub forma echivalentă:  $-\frac{1}{(3 - \sin x)(\sin x - 2)} \leq \frac{1}{2}$

sau:  $\frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)} \leq \frac{1}{2}$ .

Însă:  $3 - \sin x \geq 2; 2 - \sin x \geq 1$ .

Prin urmare:  $\frac{1}{(3 - \sin x)(2 - \sin x)} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$ .

76. Să se arate că funcția:  $f(x) = \frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x}$

ia valori pozitive pentru toate valorile lui  $x$  admisibile.

Soluție. Ținând seama că  $\sin x \neq 0$ ,  $\cos x \neq 0$ ,  $\sin x \neq -1$ , adică  $x \neq k\frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), atunci:

$$f(x) = \frac{\sin x \left(1 + \frac{1}{\cos x}\right)}{\cos x \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x}.$$

Fiindcă pentru  $x \neq k\frac{\pi}{2}$  avem:  $1 + \cos x > 0$ ;  $1 + \sin x > 0$ , rezultă că  $f(x) > 0$ .

77. Să se demonstreze inegalitatea:  $(3 + 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha) x^2 - 2x(\cos \alpha + \sin \alpha) + 1 \geq 0$ ,

unde  $\alpha$  și  $x$  sînt numere reale arbitrare.

Soluție. Notînd cu  $\Delta$  realizantul ecuației, obținem:

$$\Delta = 4[(\cos \alpha + \sin \alpha)^2 - (3 + 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha)] = 8(\sin \alpha - 1)(\cos \alpha + 1), \text{ deci } \Delta \leq 0.$$

Pe de altă parte,  $3 + 2 \cos \alpha - 2 \sin \alpha = 3 + 2 \left[ \cos \alpha - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] =$

$$= 3 - 2\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \geq 3 - 2\sqrt{2} > 0,$$

ceea ce demonstrează inegalitatea.

Cînd  $\Delta = 0$ , egalitatea se obține pentru  $\sin \alpha = 1$ , adică pentru

$$\alpha = (-1)^k \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ și } x = 1$$

sau pentru  $\cos \alpha = -1$ , adică pentru  $\alpha = (2k + 1)\pi$  și  $x = -1$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

78. Să se demonstreze că, dacă  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ , atunci:

$$\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 8. \quad (1)$$

Soluție. Transformăm membrul stîng al inegalității date în felul următor:

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} &= \frac{1}{\sin^2 x (1 - \operatorname{tg} x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{tg} x)} = \\ &= \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x (1 - \operatorname{tg} x)}. \end{aligned}$$

Dacă facem substituția  $\operatorname{tg} x = t$ , atunci inegalitatea (1) devine:

$$\frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 8 \quad (0 < t < 1). \text{ Însă: } \frac{1+t^2}{t} > 2,$$

$$\text{iar: } t(1-t) = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 \leq \frac{1}{4}.$$

Prin urmare:  $\frac{1+t^2}{t} \cdot \frac{1}{t(1-t)} > 2 \cdot 4 = 8$ , c.c.t.d.

79. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \operatorname{tg} \alpha_n,$$

știind că:  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

*Soluție.* Pe intervalul  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  funcția sinus este strict crescătoare, iar funcția cosinus, strict descrescătoare.

Astfel:  $\sin \alpha_1 < \sin \alpha_2 < \dots < \sin \alpha_n$  și:  $\cos \alpha_1 > \cos \alpha_2 > \dots > \cos \alpha_n$ .

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} &> \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} > \\ &> \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_1} = \frac{n \sin \alpha_1}{n \cos \alpha_1} = \operatorname{tg} \alpha_1 \\ \text{și: } \frac{\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} &< \frac{n \sin \alpha_n}{\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n} < \frac{n \sin \alpha_n}{n \cos \alpha_n} = \operatorname{tg} \alpha_n. \end{aligned}$$

80. Să se demonstreze că pentru orice unghi  $\alpha \in (0, \pi)$  există relația:

$$\sin \alpha + \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{1}{3} \sin 3\alpha > 0.$$

*Soluție.*  $\sin 3\alpha = \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \sin \alpha (2\cos^2 \alpha - 1) = 4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Înlocuind, membrul stîng al inegalității devine: } \sin \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \frac{1}{3} (4 \sin \alpha \cos^2 \alpha - \\ - \sin \alpha) = \frac{1}{3} (4 \sin \alpha \cos^2 \alpha + 3 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha) = \frac{1}{3} \sin \alpha (4 \cos^2 \alpha + 3 \cos \alpha + 2) = \\ = \frac{1}{3} \sin \alpha \left[ \left( 2 \cos \alpha + \frac{3}{4} \right)^2 + \frac{23}{16} \right] > 0. \end{aligned}$$

81. Știind că  $A + B + C = \pi$ , să se demonstreze inegalitatea:

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq 1.$$

*Soluție.* Înlocuind  $A = \pi - 2\alpha, B = \pi - 2\beta$  și  $C = \pi - 2\gamma$ , în care  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , obținem:

$$8 \sin \frac{\pi - 2\alpha}{2} \sin \frac{\pi - 2\beta}{2} \sin \frac{\pi - 2\gamma}{2} \leq 1$$

sau:  $1 - 8 \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \beta \right) \sin \left( \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \geq 0$ , deci:  $1 - 8 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \geq 0$ .

Din relația de condiție  $\cos \gamma = -\cos (\alpha + \beta)$  și deci:

$$1 + 8 \cos \alpha \cos \beta \cos (\alpha + \beta) \geq 0.$$



Dar:  $1 = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta)$  și  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ .

Rezultă:

$$\sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + 4[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + 4\cos^2(\alpha + \beta) + 4\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) = \sin^2(\alpha - \beta) + [\cos(\alpha - \beta) + 2\cos(\alpha + \beta)] \geq 0, \text{ c.c.t.d.}$$

Demonstrația inegalității propuse când  $A, B, C$  sînt unghiurile unui triunghi.

**Soluția 1°.** Aplicăm relația cunoscută:  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ ,

de unde:  $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = 2(\cos A + \cos B + \cos C) - 2$ .

Deci trebuie să demonstrăm că:  $\cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$ .

Înlocuind prin relațiile:  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ;  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ;  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ ,

$$\text{obținem: } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \leq \frac{3}{2},$$

de unde:  $ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) - a^3 - b^3 - c^3 \leq 3abc$ . (1)

Știm că  $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab)$ .

Înlocuind în această egalitate pe  $a^2 + b^2$  cu o cantitate mai mică  $2ab$ , obținem inegalitatea:

$$a^3 + b^3 \geq (a+b)ab.$$

Analog:

$$a^3 + c^3 \geq (a+c)ac \text{ și } b^3 + c^3 \geq (b+c)bc.$$

Adunînd aceste trei inegalități, membru cu membru, se obține:

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geq ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c). \quad (2)$$

Știm, de asemenea, că:  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

și:  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$ , de unde obținem:  $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ . (3)

Și, în definitiv, din (2) și (3), obținem (1), adică c.c.t.d.

**Soluția 2°.** Dacă suma a trei unghiuri  $A + B + C = \pi$ , cel puțin unul din ele, de exemplu

$$A \leq \frac{\pi}{3}. \text{ Astfel: } 0 < \frac{A}{2} \leq 30^\circ, \text{ de unde: } \sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Rezultă:  $60^\circ \leq \frac{B}{2} + \frac{C}{2} < 90^\circ$ , deci:  $\cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$ .

Deoarece  $\cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) \leq 1$ , avem:  $\frac{1}{2} \left[ \cos\left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2}\right) - \cos\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) \right] \leq \frac{1}{4}$ ,

de unde:  $\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{4}$ . (2)

Înmulțind membru cu membru (1) cu (2), obținem:  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ .

**Soluția 3°.** Se știe că:  $2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc}$ .

Deoarece  $(b-c)^2 \geq 0$ , rezultă  $2 \sin^2 \frac{A}{2} \leq \frac{a^2}{2bc}$ , de unde:  $0 < \sin \frac{A}{2} < \frac{a}{2\sqrt{bc}}$ ; analog:

$$0 < \sin \frac{B}{2} \leq \frac{b}{2\sqrt{ac}} \text{ și } 0 < \sin \frac{C}{2} \leq \frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Și, în definitiv, prin înmulțire se obține:  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$ .

## Exerciții și probleme propuse

### A. Aplicații ale formulelor 1—4.

Să se găsească funcțiile trigonometrice ale unghiului  $\alpha$ , știind că:

1.  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ .
2.  $\sin \alpha = -\frac{3}{10}$ .
3.  $\cos \alpha = \frac{5}{6}$ .
4.  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .
5.  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{8}$ .
6.  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{9}{40}$ .
7.  $\operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{6}$ .
8.  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ .
9.  $\sec \alpha = 3$ .

10. Știind că  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ , să se afle  $\cos \alpha$ .

11. Cunoscând că  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ , să se afle  $\operatorname{tg} \alpha$ .

12. Se dă  $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$ ; să se afle  $\sin \alpha$ .

13. Știind că  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  și că  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ , să se afle  $\operatorname{tg} \alpha$ .

14. Cunoscând că  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  și că  $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ , să se afle  $\operatorname{ctg} \alpha$ .

15. Știind că  $\alpha$  este un unghi ascuțit pozitiv și că  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{5}$ , să se afle  $\sin \alpha$  și  $\sec \alpha$ .

16. Fiind dat  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{b}{a}}$ , să se arate că  $\sin \alpha = \sqrt{\frac{b}{a+b}}$ .

Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile:

17.  $\frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}$ .

18.  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$ .

19. a)  $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ ; b)  $\frac{\cos^2 \alpha - 1}{\sin^2 \alpha - 1}$ .

20.  $(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha$ .

21.  $\sin^2 \alpha \cdot \sec^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha$ .

22.  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha}$ .

23.  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}$ .

24.  $\frac{\cos^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ .

25. a)  $E_1 = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha}$ ;

b)  $E_2 = \frac{2}{(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)(\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha)} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ .

26. a)  $\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$ ;

b)  $\left( \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} - \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)^2$ .

28.  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

29.  $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}$ .

Să se verifice identitățile:

27.  $\operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha$ .

30.  $\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha$ .

31.  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta} = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$
32.  $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} = \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta - 1.$
33.  $\frac{\cos \alpha + \sec \alpha}{\cos \alpha - \sec \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha - 1}.$
34.  $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha.$
35.  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha \cdot \sec^2 \alpha$
36.  $\frac{1 - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} \cdot \frac{1 + \sec \alpha}{1 + \operatorname{cosec} \alpha} = \operatorname{ctg}^3 \alpha.$
37. a)  $\sin \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) + \cos \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) = \sec \alpha + \operatorname{cosec} \alpha;$   
 b)  $1 - (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha;$   
 c)  $\frac{\sin (2\alpha + \beta)}{\sin \alpha} + \frac{\sin (\alpha + 2\beta)}{\sin \beta} - 4 \cos (\alpha + \beta) = \operatorname{cosec} \alpha \operatorname{cosec} \beta (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta);$   
 d)  $\frac{\sin^3 \alpha \cos \alpha + \sin^3 \beta \cos \beta}{\sin (\alpha + \beta)} = \cos (\alpha - \beta) (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) - \sin \alpha \sin \beta.$

Să se arate că expresiile 38—42 nu depind de  $\alpha$ .

38.  $\sec^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha.$
39.  $\frac{\sin^2 \alpha}{\sec^2 \alpha - 1} + \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{cosec}^2 \alpha - 1}.$
40.  $\frac{1 + \sin^2 \alpha}{2 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{1 + \cos^2 \alpha}{2 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$
41.  $3 (\cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha) - 2 (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha).$
42.  $\sin^8 \alpha + \cos^8 \alpha - 2 (1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)^2.$
43. Să se exprime în funcție de  $\operatorname{tg} \alpha$  și  $\operatorname{ctg} \alpha$  expresia:  $E = \frac{1}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}.$
44. Să se exprime expresia:

$$E(\alpha) = \operatorname{cosec} \alpha \sqrt{\frac{1}{1 + \cos \alpha} + \frac{1}{1 - \cos \alpha}} - \sqrt{2} \text{ cu ajutorul lui } \operatorname{ctg} \alpha.$$

45. Să se calculeze expresia:  $E = m \sin \alpha - n \cos \alpha$ , știind că:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2mn}{m^2 - n^2} (m \neq n).$$

#### B. Aplicații ale formulelor 5—16

46. Se dă  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ ;  $\cos \beta = -\frac{1}{4}$ . Să se calculeze:  $\sin (\alpha + \beta)$ ;  $\sin (\alpha - \beta)$ ;  
 $\cos (\alpha + \beta)$ ;  $\cos (\alpha - \beta).$
47. Se dă  $\operatorname{tg} \alpha = 2,3$ ;  $\operatorname{tg} \beta = -1,8$ . Să se calculeze:  $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$  și  $\operatorname{tg} (\alpha - \beta).$
48. Să se calculeze  $\operatorname{tg} (\alpha + \beta)$ , știind că  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  și  $\operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}.$
49. Să se calculeze  $\sin (\alpha + \beta)$  și  $\cos (\alpha + \beta)$ , știind că  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  și  $\cos \beta = \frac{3}{5}.$

Să se calculeze:

50.  $\operatorname{tg} (\alpha - \beta + \gamma).$
51.  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \beta \right).$
52.  $\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right).$
53.  $\sin 15^\circ.$
54.  $\operatorname{ctg} 105^\circ.$
55.  $\sin 135^\circ.$
56.  $\cos 15^\circ.$
57.  $\operatorname{tg} 15^\circ.$
58.  $\operatorname{ctg} 15^\circ.$

59.  $\text{tg } 135^\circ$ .

Să se verifice identitățile:

60.  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ .

61.  $\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = 1 - \cos^2 \alpha - \sin^2 \beta$ .

62. a)  $\cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta$ ; b)  $\sin \alpha = \sin(\alpha - \beta) \cos \beta + \sin \beta \cos(\alpha - \beta)$ ; c)  $\cos \alpha = \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \sin(\alpha + \beta) \sin \beta$ .

63.  $\sin \alpha \sin(\beta - \gamma) + \sin \beta \sin(\gamma - \alpha) + \sin \gamma \sin(\alpha - \beta) = 0$ .

64.  $\cos \alpha + \cos(120^\circ - \alpha) + \cos(120^\circ + \alpha) = 0$ .

65.  $\text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha + \sin \beta \cos \beta}$ .

66.  $\text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta}$ .

67.  $\text{tg} \alpha = \text{tg}(\alpha - \beta) \text{tg} \alpha \text{tg} \beta + \text{tg}(\alpha - \beta) + \text{tg} \beta$ .

68.  $\text{tg}(\alpha + \beta) + \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{2 \text{tg} \alpha \sec^2 \beta}{1 - \text{tg}^2 \alpha \text{tg}^2 \beta}$ .

69.  $\frac{\text{tg} \alpha + \text{tg} \beta}{\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \beta} = \text{tg} \alpha \text{tg} \beta$ .

70.  $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - \sin \beta}$ .

71.  $\text{tg}(\alpha - \beta) + \text{tg}(\beta - \gamma) + \text{tg}(\gamma - \alpha) = \text{tg}(\alpha - \beta) \text{tg}(\beta - \gamma) \text{tg}(\gamma - \alpha)$ .

72. Din egalitatea:

$$\frac{\text{tg}(\alpha - \beta)}{\text{tg} \alpha} + \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \alpha} = 1, \text{ să se deducă relația: } \text{tg}^2 \gamma = \text{tg} \alpha \text{tg} \beta.$$

73. Să se arate că expresia:  $E = \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)$  este independentă de  $\alpha$ .

74. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$ , să se verifice egalitățile: a)  $\text{tg} \alpha \text{tg} \beta + \text{tg} \beta \text{tg} \gamma + \text{tg} \gamma \text{tg} \alpha = 1$ ; b)  $\text{ctg} \alpha + \text{ctg} \beta + \text{ctg} \gamma = \text{ctg} \alpha \text{ctg} \beta \text{ctg} \gamma$ .

75. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se verifice identitățile: a)  $\sin^2 \alpha + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha = \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta = \sin^2 \gamma + \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$ ;

b)  $\text{tg}^3 \alpha \text{tg}^3 \beta \text{tg}^3 \gamma - \text{tg}^3 \alpha - \text{tg}^3 \beta - \text{tg}^3 \gamma = \frac{3 \text{tg} \alpha \text{tg} \beta \text{tg} \gamma}{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ .

76. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ , să se verifice identitatea:

$$(1 + \text{tg} \alpha)(1 + \text{tg} \beta)(1 + \text{tg} \gamma) = 2(1 + \text{tg} \alpha \text{tg} \beta \text{tg} \gamma).$$

77. Știind că  $\alpha + \beta = \gamma$ , să se verifice identitatea:  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1$ .

78. Să se demonstreze că dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt unghiuri ascuțite, iar  $\text{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  și  $\text{tg} \beta = \frac{1}{3}$ , atunci  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .

79. Să se demonstreze că dacă  $\alpha, \beta, \gamma$  sînt unghiuri ascuțite și au tangentele, respectiv, egale cu  $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}$  și  $\frac{1}{8}$ , atunci:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}.$$

80. Să se demonstreze că dacă  $\alpha$  și  $\beta$  sînt unghiuri ascuțite, iar  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$  și  $\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{7}$ , atunci:  $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$ .

C. Aplicații ale formulelor 17-34

81. Se dă  $\sin \alpha = 0,6$ . Să se calculeze  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$ .
82. Știind că  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  și că  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ , să se calculeze  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ .
83. Se dă  $\sin \alpha = 0,3$ . Să se calculeze  $\sin 3\alpha$ .
84. Se dă  $\cos \alpha = -0,2$ . Să se calculeze  $\cos 3\alpha$ .
85. Se dă  $\sin 2\alpha = 0,35$ . Să se calculeze  $\sin \alpha$ .
86. Se dă  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} \alpha$ .
87. Să se calculeze  $\sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}$  și  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , știind că  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  și că  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ .
88. Să se arate că dacă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$  și  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  fiind unghiuri ascuțite, avem:
- $$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}.$$
89. Se dă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} 2\alpha$  și  $\operatorname{tg} 3\alpha$ .
90. Se dă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{7}$ . Să se calculeze  $\sin \frac{\alpha}{2}$  și  $\cos \frac{\alpha}{2}$ .
91. Cunoscînd că  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{24}{7}$ , să se calculeze  $\sin \frac{\alpha}{2}$  și  $\cos \frac{\alpha}{2}$ . Să se explice rezultatul.
92. Să se calculeze  $\sin 4\alpha, \sin 5\alpha$  și  $\sin 6\alpha$ , în funcție de  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ .
93. Să se calculeze  $\cos 4\alpha$  și  $\cos 5\alpha$ , în funcție de  $\sin \alpha$  și  $\cos \alpha$ .
94. Fiind dat  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ , să se calculeze  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha, \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}$ .
95. Știind că  $\sin \alpha = m$ , să se calculeze  $\sin 2\alpha, \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  și  $\cos 3\alpha$ .
96. Știind că  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 - \sqrt{3}$ , să se calculeze:  $\sin \alpha, \cos \alpha$  și  $\operatorname{tg} \alpha$ .
97. Fiind dat  $\operatorname{tg} \alpha = 1 - \sqrt{2}$ , să se calculeze  $\sin 2\alpha, \cos 2\alpha$  și  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

98. Să se exprime  $\sin^3 \alpha$  și  $\sin^4 \alpha$ , prin funcțiile unghiurilor multiple ale unghiului.

99. Să se aducă la forma cea mai simplă expresiile: a)  $E_1 = \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha \cos 4\alpha$ ;

$$b) E_2 = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha}; c) E_3 = \frac{\sin \alpha - 2\cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sin^3 \alpha}.$$

Să se verifice identitățile:

$$100. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}.$$

$$103. \frac{\sin 3\alpha + \sin^3 \alpha}{\cos 3\alpha - \cos^3 \alpha} = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$101. \frac{\cos \alpha}{\sec \frac{\alpha}{2} + \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}} =$$

$$104. \operatorname{tg} 2\alpha + \sec 2\alpha = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}.$$

$$= \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) \sin \alpha.$$

$$105. \sin 3\alpha \operatorname{cosec} \alpha - \cos 3\alpha \sec \alpha = 2.$$

$$106. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

$$102. \frac{\cos^2 \alpha}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} = -\frac{1}{4} \sin 2\alpha.$$

$$107. a) \sin 3\alpha =$$

$$= 4 \sin \alpha \sin \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right);$$

$$b) \cos 3\alpha = 4 \cos \alpha \cos \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \cos \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right); c) \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right).$$

$$108. \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) = \sqrt{\frac{1 - \sin 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha}}.$$

$$116. \frac{1 + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{tg} \alpha)^2.$$

$$109. \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)} = \sin 2\alpha.$$

$$117. \frac{\cos 2\alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1).$$

$$118. \operatorname{ctg} \alpha \sin 4\alpha + 2 = 2(\cos^2 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha).$$

$$110. \operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg} \alpha (1 + \sec 2\alpha).$$

$$119. \cos^2 (\alpha + \beta) + \cos^2 (\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1.$$

$$111. \frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$120. \frac{\sin^3 \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha} = 2 \operatorname{cosec} 2\alpha - \sin 2\alpha.$$

$$112. 1 + \sin 2\alpha = \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$121. \cos 2\alpha - 3 \cos \alpha + 4 = \frac{\cos 3\alpha + 9}{2 \cos \alpha + 3}.$$

$$113. \cos 2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}.$$

$$122. \frac{\operatorname{tg} 3\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} - \alpha \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + \alpha \right).$$

$$114. \sin 2\alpha = \frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$123. \sin^2 \frac{\alpha}{2} (1 + \cos \alpha) = \cos^2 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha).$$

$$115. \sin 2\alpha = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha}.$$

$$124. \cos^2 \alpha = 4 \cos^4 \frac{\alpha}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha.$$

125. a)  $(\cos \alpha + \cos \beta)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta)^2 = 4 \cos^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ ; b)  $(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2} (\alpha - \beta)$ .

126. Să se arate că expresia:  $E = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{(1 - \sin \alpha)(1 - \cos \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}$  nu depinde de  $\alpha$ .

D. Aplicații ale formulelor 35–63

Să se transforme în produs expresiile:

127. a)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$ ; b)  $\sin 78^\circ - \sin 42^\circ$ ;  
c)  $\cos 152^\circ + \cos 28^\circ$ ; d)  $\cos 48^\circ - \cos 12^\circ$ .

128. a)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 15^\circ$ ; b)  $\operatorname{tg} 21^\circ + \operatorname{tg} 35^\circ$ ; c)  $1 + \operatorname{tg} 42^\circ 08'$ .

129. a)  $\sin \alpha + \cos \alpha$ ; b)  $\sin \alpha - \cos \alpha$ ; c)  $1 - \operatorname{tg} \alpha$ ; d)  $1 + \operatorname{tg} \alpha$

130. a)  $1 + \sin 3\alpha$ ; b)  $\sin 2\alpha + \sqrt{3} \cos 2\alpha$ ; c)  $a \cos^3 \alpha + b \sin^3 \alpha$ .

131. a)  $1 - \sin \alpha - \cos \alpha$ ; b)  $1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$ ;  
c)  $1 + \operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha$ ; d)  $1 + \sin \alpha - \cos \alpha - \operatorname{tg} \alpha$ ;  
e)  $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$ .

132. a)  $\sin \left( \frac{\pi}{6} + \alpha \right) + \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right)$ ; b)  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .

133. a)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$ ; b)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta$ .

134. Pentru  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . a)  $\sqrt{1 + \cos \alpha} + \sqrt{1 - \cos \alpha}$ ;

b)  $\sqrt{1 + \cos \alpha} - \sqrt{1 - \cos \alpha}$ .

135. a)  $\cos \alpha + \cos 3\alpha + \sin 2\alpha$ ; b)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma - \sin (\alpha + \beta + \gamma)$ ;  
c)  $\sin (-\alpha + \beta + \gamma) + \sin (\alpha - \beta + \gamma) + \sin (\alpha + \beta - \gamma) - \sin (\alpha + \beta + \gamma)$ .

136. a)  $\operatorname{tg} \alpha + 2 \sin^2 \alpha$ ; b)  $\operatorname{tg} \alpha - 2 \sin^2 \alpha$ .

137.  $\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 - \cos 4\alpha}$ .

138. a)  $\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ ; b)  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \alpha - \sin \beta}$ ; c)  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$ ; d)  $\frac{\sin \alpha + \cos \beta}{\sin \alpha - \cos \beta}$ ; e)  $\frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}{(\cos \alpha + \cos \beta)^2}$

139.  $\frac{m \sin \alpha - n \sin \beta}{m \cos \alpha - n \cos \beta}$ . 140.  $\frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha + b}{a \cos \alpha - b \sin \alpha - b}$ .

141. Să se transforme în produs suma de cosinusuri a  $n$  unghiuri în progresie aritmetică:

$S = \cos \alpha + \cos (\alpha + h) + \cos (\alpha + 2h) + \dots + \cos [\alpha + (n - 1)h]$ .

Aplicație.  $S = \cos \alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha$ . (V. indicații și răspunsuri. Să se explice aspectul diferit al rezultatelor.)

142. Să se transforme în produs expresiile:

a)  $\sin \frac{5\pi}{24} + \cos \frac{11\pi}{24}$ ;

b)  $\sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha} + \sqrt{4 \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}$ .

143. Să se arate că expresia:

$E = \frac{\cos 7\alpha}{2 \cos \alpha} - \cos 2\alpha + \cos 4\alpha - \cos 6\alpha$  este independentă de  $\alpha$ .

144. Să se arate că expresia

$E = \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta$  este independentă de  $\alpha$  și  $\beta$ .

145. Să se arate că:

a)  $\sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}$ ;

b)  $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$ .

146. Să se arate că:  $\frac{\sin 15^\circ + \cos 15^\circ}{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ} = \frac{\cos 5^\circ + \sin 25^\circ}{\cos 25^\circ - \sin 5^\circ}$ .

147. Să se arate că: a)  $\frac{1}{\sin 15^\circ} - \frac{1}{\cos 15^\circ} = 2\sqrt{2}$ ; b)  $\frac{\cos 15^\circ - \sin 15^\circ}{\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ .

148. Să se arate că:  $\sin(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta) - \sin(\beta - \gamma) \cos(\beta + \gamma) + \sin(\gamma - \delta) \cos(\gamma + \delta) + \sin(\delta - \alpha) \cos(\delta + \alpha) = 0$ .

Să se verifice identitățile:

149.  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$ .

150.  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$ .

151.  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

152.  $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \beta - \cos \alpha} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

153.  $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right)$ .

154.  $\frac{\sin \alpha + \cos(2\beta - \alpha)}{\cos \alpha - \sin(2\beta - \alpha)} = \frac{1 + \sin 2\beta}{\cos 2\beta}$ .

155.  $\sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$ .

156.  $\frac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ .

157.  $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$ .

158.  $1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$ .

159.  $\operatorname{tg} \alpha + 2 \operatorname{tg} 2\alpha + 4 \operatorname{tg} 4\alpha + 8 \operatorname{ctg} 8\alpha = \operatorname{ctg} \alpha$ .

160.  $1 + 2(\cos 4\alpha + \cos 8\alpha) = \frac{\sin 10\alpha}{\sin 2\alpha} (\sin 2\alpha \neq 0)$ .



$$161. \frac{2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \frac{2 \sin \alpha + \cos 3\alpha - \cos 5\alpha}{2 \cos \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}.$$

$$(162) a) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha;$$

$$b) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \cos 7\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha;$$

$$c) \frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \dots + \sin (2n-1)\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \dots + \cos (2n-1)\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha.$$

Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se verifice identitățile:

$$163. a) \frac{\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma}{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; b) \frac{\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha}{\sin \beta + \sin \gamma + \sin \alpha} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$164. \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma}{(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

$$165. \operatorname{tg}^2 \alpha + (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma) = \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \sec^2 \alpha.$$

$$166. \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}.$$

$$(167) \sin \alpha - \sin \beta + \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$168. -\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$169. \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

$$170. \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - 2 = 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$171. \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma - 1 = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$(172) \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma + 1 = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

$$(173) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma + 1 = -4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

$$174. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 1.$$

$$175. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$176. \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \gamma + \operatorname{ctg} \beta \operatorname{ctg} \gamma = 1.$$

E. Aplicații diverse

177. Să se transforme în produs expresia:

$$E = \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos (\alpha + \beta + \gamma).$$

$$(178) \text{ Să se verifice identitatea: } \frac{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha.$$

$$(179) \text{ Să se verifice egalitățile: } \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{14\pi}{9} = 0.$$

$$(180) 8 \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = 1.$$

Să se verifice identitățile:

$$181. \frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \cos \alpha - 1} = \sin \alpha \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{2} \right) \operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$182. \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha + \cos^4 \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^4 \left( \alpha + \frac{3\pi}{4} \right) = \frac{3}{2}.$$

$$183. a) \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} + \alpha \right) - \sin^2 \left( \frac{\pi}{8} - \alpha \right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}; b) (1 + \sin \alpha) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \alpha.$$

$$184. a) 2 \frac{\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 2\beta - \operatorname{ctg} 2\alpha - \operatorname{ctg} 2\beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta} = 1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} 2\beta;$$

$$b) \frac{\cos^2 2\alpha + \cos^2 (\alpha - \beta) - 2 \cos (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) \cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta \cos (\alpha + \beta)} = 1.$$

$$185. \frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha + 2}{\sin \left( \frac{\pi}{6} + \alpha \right) \sin \left( \frac{\pi}{6} - \alpha \right) + 2 \sin^2 \alpha} = 8 \cos^2 \alpha.$$

$$186. 4 (\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha) = 4 \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha.$$

$$187. \frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha + \sin 9\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha + \cos 9\alpha} = \operatorname{tg} 5\alpha.$$

$$188. \frac{\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)}{\sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)} + \frac{\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)}{\cos (\alpha + \beta) - \cos (\alpha - \beta)} = \frac{2 \operatorname{ctg} \beta}{\sin 2\alpha}.$$

$$189. \text{Să se demonstreze egalitatea: } \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{2\pi}{2n} \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{2n} \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} \frac{(n-1)\pi}{2n} = 1.$$

Să se transforme în produs expresiile:

$$190. E = \sin \alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha.$$

$$191. E = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - 3 \operatorname{tg} 3\alpha.$$

$$192. E = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha - 4 \operatorname{tg} 3\alpha.$$

193. Știind că  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , să se arate că avem:

$$(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma) [1 - (\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta + \operatorname{ctg}^2 \gamma)] = 2.$$

$$194. \text{Să se arate că dacă: } A_1 = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha, B_1 = 2C \sin \alpha \cos \alpha + B (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - 2A \sin \alpha \cos \alpha, C_1 = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha, \text{atunci avem: } B_1^2 - 4A_1C_1 = B^2 - 4AC.$$

$$195. \text{Să se calculeze sumele: } S_1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + \dots + \sin^2 n\alpha; S_2 = \sin^2 \alpha + 2^2 \sin^2 2\alpha + \dots + n^2 \sin^2 n\alpha.$$

Să se arate că:

$$196. (1 - \sin \alpha)x^2 - 2x \cos \alpha + 1 + \sin \alpha \geq 0.$$

$$197. (1 + \cos \alpha)x^2 - 2x \sin \alpha + 1 - \cos \alpha \geq 0.$$

198. Să se demonstreze inegalitatea:

$$\frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} + \frac{\sin \frac{B}{2}}{\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2}} + \frac{\sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}} \geq 2\sqrt{3},$$

știind că  $A + B + C = \pi$ .

$$199. \text{Să se arate că oricare ar fi } \alpha \text{ și } \beta, \text{avem: } \cos (\alpha + \beta) + \sin \alpha + \sin \beta \leq \frac{3}{2}.$$

$$200. \text{Să se arate că, dacă } \alpha \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right) \text{ și } \beta \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\text{atunci avem: } \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \leq \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2}.$$

## Ecuatii trigonometrice

În trigonometrie, prin ecuații trigonometrice se înțeleg acele ecuații care conțin operații trigonometrice asupra necunoscutelor și care se pot rezolva prin metode elementare.

În multe cazuri, prin transformări echivalente, rezolvarea unei ecuații trigonometrice revine la rezolvarea unor ecuații de forma  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$  etc., numite ecuații elementare. Uneori însă se ajunge la ecuații reductibile la ecuații elementare, dar a căror mulțime a soluțiilor (rădăcinilor) conține, pe lângă soluțiile ecuației, și alte elemente. De aceea este necesară verificarea soluțiilor obținute.

Din mulțimea soluțiilor nu fac parte valorile pentru care funcțiile trigonometrice care intervin în ecuație n-au sens.

Dacă în procesul rezolvării unei ecuații se face o schimbare de variabilă, noua variabilă nefiind definită pe toată axa reală, se pot pierde rădăcini, și anume valorile pentru care variabila respectivă n-are sens.

Sistemele trigonometrice pot conține și unele ecuații în care nu intervin funcțiile trigonometrice.

Rezolvarea inecuațiilor trigonometrice revine adesea la studiul semnelor unor funcții trigonometrice particulare pe un interval.

Pentru următoarele tipuri de ecuații, frecvent întâlnite în aplicații, indicăm soluțiile sau metodele de rezolvare.

a) *Ecuații elementare:*

1)  $\sin x = a$  cu soluțiile  $x = (-1)^k \arcsin a + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), dacă  $|a| \leq 1$ ;

2)  $\cos x = a$  cu soluțiile  $x = \pm \arccos a + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), dacă  $|a| \leq 1$ ;

3)  $\operatorname{tg} x = a$  cu soluțiile  $x = \operatorname{arctg} a + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

4)  $\operatorname{ctg} x = a$  cu soluțiile  $x = \operatorname{arcctg} a + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Ecuațiile de forma  $\sin bx = a$  etc. se reduc la precedentele cu ajutorul substituției  $bx = u$ .*

b) *Ecuații de forma  $f(u) = f(v)$ :*

1)  $\sin u = \sin v$  este echivalentă cu ecuația  $u = (-1)^k v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

2)  $\cos u = \cos v$  este echivalentă cu ecuația  $u = \pm v + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

3)  $\operatorname{tg} u = \operatorname{tg} v$  ( $u \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ) este echivalentă cu ecuația  $u = v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ );

4)  $\operatorname{ctg} u = \operatorname{ctg} v$  ( $u \neq k\pi$ ) este echivalentă cu ecuația  $u = v + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

c) *Ecuatii liniare în  $\sin x$  și  $\cos x$ :*  $a \sin x + b \cos x = c$ , unde numerele  $a$ ,  $b$  nu sînt nule în același timp.

*Metoda 1.* Notînd  $\frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \varphi$  ( $a \neq 0$ ), ecuația devine:  $\sin(x + \varphi) = c \cos \varphi$  etc.

*Metoda 2.* Făcînd substituția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , ecuația se transformă într-o ecuație de gradul al doilea în  $t$ :  $(c + b)t^2 - 2at + c - b = 0$ .

Dacă  $c + b = 0$ , valorile  $x = \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), pentru care funcția  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  n-are sens, sînt rădăcini ale ecuației.

d) *Ecuatii omogene în  $\sin x$  și  $\cos x$ :*

$a_0 \sin^n x + a_1 \sin^{n-1} x \cos x + \dots + a_k \sin^{n-k} x \cos^k x + \dots + a_n \cos^n x = 0$ , unde numerele  $a_0, a_1, \dots, a_n$  nu sînt nule în același timp.

Împărțind ambii membri cu  $\cos^n x$  și făcînd substituția  $\operatorname{tg} x = t$ , se obține ecuația algebrică de gradul  $n$  în  $t$ :

$$a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

## Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 3x - \cos 2x - \sin x = 0.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie sub forma:  $2 \sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$  sau:  $\cos 2x(2 \sin x - 1) = 0$ , de unde:  $\cos 2x = 0$  sau  $\sin x = \frac{1}{2}$ .

Așadar, ecuația dată are rădăcinile:  $x = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

2. Să se rezolve ecuația:

$$2 \sin^2 3x + \sin^2 6x = 2.$$

*Soluție.* Folosind identitatea  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , ecuația devine:

$$1 + \cos 12x + 2 \cos 6x = 0$$

sau, transformînd în produs suma primilor doi termeni din membrul stîng al ecuației precedente:

$$2 \cos 6x (\cos 6x + 1) = 0.$$

Ultima ecuație se descompune în următoarele:  $\cos 6x = 0$ ;  $\cos 6x + 1 = 0$ , de unde:

$$x = \left\{ \frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{6} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3} \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

3. Să se rezolve ecuația:

$$\cos \alpha x + \cos (\alpha - 2)x - \cos x = 0.$$

*Soluție.* Transformînd în produs suma primilor doi termeni, obținem:  
 $2 \cos [(\alpha - 1)x] \cos x - \cos x = 0$  sau:  $\cos x [2 \cos (\alpha - 1)x - 1] = 0$ , de unde, pentru  $\alpha \neq 1$ :  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\alpha - 1} \left( \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right) \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și:  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), pentru  $\alpha = 1$ .

4. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x \cos x - \sin x \cos^3 x = \frac{1}{4}.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie succesiv sub forma:  $\sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$ ,  
 $-\sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4}$ ;  $\sin 4x = -1$ , de unde:  $x = -\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

5. Să se rezolve ecuația:

$$4 \sin^4 4x + 4 \cos^4 4x + \cos 4x = 4 \sin^4 x + 4 \cos^4 x.$$

*Soluție.* Folosind identitatea:  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ , ecuația devine:  $2(\sin^2 2x - \sin^2 8x) + \cos 4x = 0$  sau, ținând seama de identitatea  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ ;  $2\left(\frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 16x}{2}\right) + \cos 4x = 0$  sau încă  $\cos 16x = 0$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{32} + k \frac{\pi}{16}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

6. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

*Soluție.* Folosind identitățile:  $\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$ ;  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ , ecuația devine:  $3 \sin x \cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) = \frac{3}{8}$  sau:  $[\sin 4x = \frac{1}{2}]$ , de unde:  $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + k \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

7. Să se rezolve ecuația:

$$\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos 3x = \sin 3x \cos 4x.$$

*Soluție.* Ținând seama de identitatea  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)]$ , ecuația devine:  $(\sin 7x - \sin 5x) - (\sin 3x - \sin x) = 0$  sau, transformând diferențele de sinusuri în produse:  $2 \sin x (\cos 6x - \cos 2x) = 0$  sau încă:  $-4 \sin x \sin 2x \sin 4x = 0$ . Prin urmare, ecuația dată se descompune în următoarele trei ecuații elementare:  $\sin x = 0$ ;  $\sin 2x = 0$ ;  $\sin 4x = 0$ . Însă dacă  $\sin x = 0$ , atunci  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 0$  și  $\sin 4x = 2 \sin 2x \cos 2x = 0$ , deci ecuația dată este echivalentă cu ecuația:

$$\sin 4x = 0,$$

de unde:  $x = k \frac{\pi}{4}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

8. Să se rezolve ecuația:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie sub forma:  $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x + \cos x) + (\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$  sau:  $(\sin x + \cos x)(1 + 2 \cos x) = 0$ .

Anulând fiecare factor, se obțin rădăcinile ecuației:  $x = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} \cup \left\{\pm 2\frac{\pi}{3} + k2\pi\right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

9. Să se rezolve ecuația:

*Soluție.* Ecuația nu are sens pentru  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  și  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), iar pentru celelalte valori ale lui  $x$  este echivalentă cu următoarea:

$$\sin x(3 + \sin 2x + \cos 2x) = 0.$$

Evident, ecuația  $3 + \sin 2x + \cos 2x = 0$  nu admite soluții; de aceea, ecuația inițială se reduce la ecuația  $\sin x = 0$ , deci  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

10. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^2 a + \sin^2(a + x) + \sin^2(a + 2x) + \sin^2(a + 3x) = 2.$$

*Soluție.* Folosind identitatea  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , ecuația devine:  $[\cos 2a + \cos 2(a + 2x)] + [\cos 2(a + x) + \cos 2(a + 3x)] = 0$  sau, transformând sumele din paranteze în produse:  $2 \cos 2(a + x) \cos 2x + 2 \cos 2(a + 2x) \cos 2x = 0$  sau încă:  $\cos 2x \cos x \cos(2a + 3x) = 0$ .

Ultima ecuație se descompune în următoarele:  $\cos 2x = 0$ ;  $\cos x = 0$ ;  $\cos(2a + 3x) = 0$ , de unde:  $x = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} - \frac{2a}{3} + k \frac{\pi}{3} \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

11. Să se determine valorile parametrului  $\alpha$  pentru care polinomul

$$P(x) = x^4 + x^3 \sin 3\alpha + x^2 \sin 2\alpha + x \sin \alpha - 1$$

este divizibil cu  $x - 1$ .

*Soluție.* Condiția necesară și suficientă ca  $P(x) \dots (x - 1)$  este:

$P(1) = \sin 3\alpha + \sin 2\alpha + \sin \alpha = 0$  sau, transformând suma  $\sin 3\alpha + \sin \alpha$  în produs:  $2 \sin 2\alpha \cos \alpha + \sin 2\alpha = 0$  sau încă:  $\sin 2\alpha (2 \cos \alpha + 1) = 0$ , de unde:  $\alpha = \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k 2\pi \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

12. Să se rezolve ecuația:

$$\sin 5x = 16 \sin^5 x.$$

*Soluție.* Dezvoltând  $\sin(3x + 2x)$ , se deduce că:  $\sin 5x = \sin^5 x - 10 \cos^2 x \sin^3 x + 5 \cos^4 x \sin x$ , după care ecuația devine:  $\sin x (3 \sin^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x - \cos^4 x) = 0$  sau, împărțind ambii membri cu  $\cos^4 x$ ,  $\sin x (3 \operatorname{tg}^4 x + 2 \operatorname{tg}^2 x - 1) = 0$ , de unde:  $\sin x = 0$ ;  $\operatorname{tg} x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Rezolvând ultimele ecuații, obținem:  $x = \left\{ k\pi \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

13. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie sub forma:  $(\sin x + \cos x) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$  sau:  $\left( 1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) (\sin x + \cos x - 1) = 0$ . Însă:  $1 - \frac{1}{2} \sin 2x > 0$ , iar  $\sin x + \cos x - 1 = \sin x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \cdot \cos x - 1 = \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - 1$ .

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu următoarea:  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde:  $x =$

$$= \left\{ k 2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k 2\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

**14. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3.$$

*Soluție.* Ecuația nu are sens pentru  $\cos x = 0$ . Observind că membrul drept al ecuației este egal cu  $3 \sin x \cos x + 3 \cos^2 x$  și împărțind ambii membri cu  $\cos^2 x$ , obținem:  $\operatorname{tg}^2 x (\operatorname{tg} x + 1) = 3(\operatorname{tg} x + 1)$  sau:  $(\operatorname{tg}^2 x - 3)(\operatorname{tg} x + 1) = 0$ , de unde:  $x = \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ .

**15. Să se rezolve ecuația:**

$$32 \cos^6 x - \cos 6x = 1.$$

*Soluție.* Folosind identitățile:  $\cos^6 x = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^3 = \frac{1}{8} (1 + 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x)$ ;

$\cos 3 \cdot 2x = 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x$ , se ajunge la ecuația:  $4 \cos^2 2x + 5 \cos 2x + 1 = 0$ , care se descompune în următoarele:  $\cos 2x = -1$ ;  $\cos 2x = -\frac{1}{4}$  și deci:  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup$

$$\cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{1}{4} \right) + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

**16. Să se rezolve ecuația:**

$$\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0.$$

*Soluția 1.* Din formulele pentru  $\sin 3x$  și  $\cos 3x$ , găsim:  $\sin^3 x = \frac{3 \sin x - \sin 3x}{4}$ ;  $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3 \cos x}{4}$ , deci ecuația se poate scrie sub forma:  $\cos 3x (\cos 3x + 3 \cos x) + \sin 3x (3 \sin x - \sin 3x) = 0$ ;  $3 (\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) + \cos^2 3x - \sin^2 3x = 0$ ;  $3 \cos 2x + \cos 6x = 0$ . Înșă fiindcă  $\cos^3 2x = \frac{1}{4} (\cos 6x + 3 \cos 2x)$ , ultima ecuație devine:  $4 \cos^3 2x = 0$ , de unde:

$$x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

*Soluția 2.* Scriem termenii ecuației sub forma:  $\cos 3x \cos^3 x = \cos 3x \cos x \cdot \cos^2 x - \frac{1}{2} (\cos 4x + \cos 2x) \cos^2 x$ ;  $\sin 3x \sin^3 x = \sin 3x \sin x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 4x) \sin^2 x$ .

Grupind termenii și ținând seama de identitățile:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ;  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ , ecuația devine:  $\cos 2x + \cos 4x \cos 2x = 0$ ;  $\cos 2x (1 + \cos 4x) = 0$  sau, transformând suma din paranteză în produs:  $2 \cos^2 2x = 0$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

**17. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$$

*Soluție.* Putem scrie:  $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$  și deci:  $\sin^8 x + \cos^8 x = \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \right)^2 - \frac{1}{8} \sin^4 2x = \frac{17}{32}$ ;  $\sin^4 2x - 8 \sin^2 2x + \frac{15}{4} = 0$ .

Rezolvând ecuația bipătrată obținută, găsim: a)  $\sin^2 2x = \frac{15}{2}$ ; b)  $\sin^2 2x = \frac{1}{2}$ .

Ecuația a) nu admite soluții. Din ecuația b) obținem:  $x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$ .

18. Să se rezolve ecuația:

$$(\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x)^2 - 5 = \cos \left( \frac{\pi}{6} - 2x \right).$$

*Soluție.* Scriind  $\sqrt{3} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ , ecuația devine:  $4 \sin^2 \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) - 5 = \cos \left( \frac{\pi}{6} - 2x \right)$  sau, ținând seama de identitatea  $\cos \alpha = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ :  $4 \sin^2 \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) - \sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) - 5 = 0$ .

Ultima ecuație este echivalentă cu următoarea:  $\sin \left( 2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1$ , de unde:  $x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

19. Să se rezolve ecuația:

$$2 \sin 17x + \sqrt{3} \cos 5x + \sin 5x = 0.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie sub forma:  $2 \sin 17x + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \cos 5x + \sin 5x = 0$  sau:  $\sin 17x + \sin \left( 5x + \frac{\pi}{3} \right) = 0$  sau încă:  $2 \sin \left( 11x + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( 6x - \frac{\pi}{6} \right) = 0$ , de unde:  $x = \left\{ -\frac{\pi}{66} + k \frac{\pi}{11} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{36} + (2k+1) \frac{\pi}{12} \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

20. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3.$$

*Soluție.* Întrebuințind formule cunoscute, aducem ecuația la forma:  $\operatorname{cosec}^2 x - \sec^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x - \cos^2 x - \sin^2 x = -3$ .

Fiindcă:  $\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$ ;  $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ , ecuația precedentă se reduce la următoarea:  $\operatorname{tg}^2 x = 1$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

21. Să se rezolve ecuația:

$$(1 + \beta) \frac{\cos x \cos (2x - \alpha)}{\cos (x - \alpha)} = 1 + \beta \cos 2x.$$

*Soluție.* Scriem ecuația sub forma:  $(1 + \beta) \cos x \cos (2x - \alpha) = \cos (x - \alpha) + \beta \cos 2x \cos (x - \alpha)$ .

Transformând produsele de cosinusuri în sume, ecuația capătă forma:  $\beta [\cos (x - \alpha) - \cos (x + \alpha)] = \cos (x - \alpha) - \cos (3x - \alpha)$  sau, transformând diferențele de cosinusuri în produse:  $\beta \sin \alpha \sin x = \sin (2x - \alpha) \sin x$ .

Ultima ecuație este echivalentă cu următoarele: a)  $\sin x = 0$ , cu soluțiile  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și b)  $\sin (2x - \alpha) = \beta \sin \alpha$ , cu soluțiile:  $x = \frac{\alpha}{2} + (-1)^k \cdot \frac{1}{2} \arcsin (\beta \sin \alpha) + k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), dacă  $|\beta \sin \alpha| \leq 1$ .

22. Să se arate că ecuația

$$\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{4}{5} \text{ nu admite soluții.}$$

*Soluție.* Transformând produsul  $\sin x \sin 3x$  în sumă, obținem:  $\sin x \sin 2x \sin 3x = \frac{1}{2} \sin 2x (\cos 2x - \cos 4x) = \frac{1}{4} \sin 4x - \frac{1}{2} \sin 2x \cos 4x \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ .



**23. Să se rezolve ecuația:**

$$\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = m^2.$$

*Soluție.* Făcând substituția  $\operatorname{tg}^2 x = t$ , ecuația devine:  $t^2 - m^2 t + 1 = 0$ , de unde:  $t = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}$ .

Pentru ca  $t$  să fie real este suficient ca  $m^4 - 1 \geq 0$ , adică  $|m| \geq 1$ .  
Dacă această condiție este îndeplinită, atunci:

$$t = \frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2} > 0.$$

Prin urmare:  $\operatorname{tg} x = \pm \sqrt{\frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}}$ , de unde:  $x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m^2 \pm \sqrt{m^4 - 1}}{2}} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**24. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx.$$

unde  $a, b, c, d$  sînt termeni consecutivi și pozitivi ai unei progresii aritmetice.

*Soluție.* Fiindcă numerele  $a, b, c, d$ , sînt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice, putem pune:  $b = a + r$ ;  $c = a + 2r$ ;  $d = a + 3r$  ( $r$  este rația progresiei).

Transformînd produsele de sinusuri în diferențe de cosinusuri, ecuația se scrie:  $\cos(2a + r)x - \cos(2a + 5r)x = 0$  sau:  $2 \sin(2a + 3r)x \sin 2rx = 0$ , de unde, fiindcă  $2a + 3r = b + c > 0$  și  $r \neq 0$ :  $x = \left\{ k \frac{\pi}{2a + 3r} \right\} \cup \left\{ k \frac{\pi}{2r} \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**25. Să se rezolve ecuația:**

$$2 + \cos x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

*Soluție.* Ecuația se poate scrie sub forma:  $\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \left( \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} - 1 \right)$  sau,

după cîteva transformări, sub forma:  $\left( \cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right) \left( 3 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right) = 0$ .

Ecuația  $3 \cos^2 \frac{x}{2} + 2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 0$  este echivalentă cu următoarea:  
 $2 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 3 = 0$  și nu admite soluții.

Așadar, ecuația dată este echivalentă cu ecuația:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**26. Să se rezolve ecuația:**

$$\operatorname{ctg} x - 2 \sin 2x = 1.$$

*Soluția 1.* Ecuația nu are sens pentru  $x = k\pi$ , iar pentru celelalte valori ale lui  $x$  este echivalentă cu următoarea:  $\cos x - \sin x = 2 \sin 2x \sin x$ .

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri, obținem:  $\cos x - \sin x = \cos x - \cos 3x$ ;  $\sin x = \cos 3x$ ;  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - x \right) = \cos 3x$ , de unde:  $\frac{\pi}{2} - x = \pm 3x + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și deci:  $x = \left\{ \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

*Soluția 2.* Ținând seama de formula  $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$  și notînd  $\operatorname{tg} x = t$ , ecuația devine:  
 $t^3 + 3t^2 + t - 1 = 0$  sau, descompunînd membrul stîng în factori:  $(t + 1)(t + 1 - \sqrt{2})(t + 1 + \sqrt{2}) = 0$ , de unde:  $t_1 = -1$ ;  $t_{2,3} = -1 \pm \sqrt{2}$ .

Rezolvînd ultimele ecuații, obținem:  $x = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + k\pi \right\} \cup \left\{ -\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ .

*Observație.* Se poate arăta că:

$$\left\{ \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1) + k\pi \right\} \cup \left\{ -\operatorname{arctg}(\sqrt{2} + 1) + k\pi \right\} = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right\} (k \in \mathbb{Z}).$$

**27. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$$

*Soluție.* Făcînd substituția  $\sin x - \cos x = t$  și folosind identitatea  $(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$ , ecuația se scrie sub forma:  $t^2 + 12t - 13 = 0$ . Această ecuație are rădăcinile  $t_1 = -13$ ,  $t_2 = 1$ . Însă  $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ , de unde  $|t| \leq \sqrt{2}$ ; prin urmare, rădăcina  $t_1 = -13$  nu poate fi considerată.

Ecuația dată este echivalentă cu următoarea:  $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde:  $x = \left\{ \pi + k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ .

**28. Să se rezolve ecuația:**

$$\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2. \quad (1)$$

*Soluție.* Folosind identitățile  $1 - \sin x = \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}\right)^2$ ,  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$ , ecuația (1) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \right| + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2$$

sau:  $\frac{1}{\sqrt{2}} \left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 2. \quad (2)$

Dacă  $1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \geq 0$ , atunci  $\left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  și ecuația (2) devine:  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = 3 + \sqrt{2} > 1$ , ceea ce contrazice ipoteza făcută. Prin urmare, rămîne cazul

$1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 0$ , deci  $\left| 1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| = -1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  și ecuația (2) devine:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 - \sqrt{2} > 1,$$

de unde:  $x = 2 \operatorname{arctg}(3 - \sqrt{2}) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**29. Să se rezolve ecuația:**

$$1 + 2 \operatorname{cosec} x = -\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}.$$

*Soluție.* Ecuația se aduce la forma:  $2 \cos^2 \frac{x}{2} (2 + \sin x) + \sin x = 0$  sau, folosind formula  $2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ ,  $2 + 2 (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = 0$ .

Făcând substituția  $\sin x + \cos x = t$ , ultima ecuație se reduce la ecuația de gradul al doilea:  $t^2 + 4t + 3 = 0$ , care are rădăcinile  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = -3$ .

Fiindcă  $|\sin x + \cos x| = \left| \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$ , soluția  $t_2 = -3$  este inacceptabilă.

Prin urmare:  $\sin x + \cos x = -1$  sau:  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , de unde:  $x = \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} \cup \left\{ \pi + k2\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Observând că ecuația inițială nu are sens pentru  $x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ , rezultă că soluțiile sale sînt:  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

20. Să se rezolve ecuația:

$$x^2 + 2x \sin(xy) + 1 = 0.$$

*Soluție.* Se constată ușor că  $x \neq 0$ . Prin urmare, ecuația poate fi scrisă sub forma echivalentă:  $\sin(xy) = -\frac{x^2 + 1}{2x}$ . (1)

Pentru ca ecuația (1) să admită soluții trebuie să fie satisfăcute inegalitățile:

$$-1 \leq \frac{x^2 + 1}{2x} \leq 1. \quad (2)$$

Inecuația  $\frac{x^2 + 1}{2x} \geq -1$  este echivalentă cu inecuația  $\frac{(x+1)^2}{2x} \geq 0$  și are soluțiile  $x = \{-1\} \cup (0, \infty)$ .

Inecuația  $\frac{x^2 + 1}{2x} \leq 1$  este echivalentă cu inecuația  $\frac{(x-1)^2}{2x} \leq 0$  și are soluțiile  $x = \{1\} \cup (-\infty, 0)$ .

Așadar, sistemul de inecuații (2) are soluțiile  $x = \{-1, 1\}$ .

Pentru  $x = \pm 1$ , ecuația (1) devine  $\sin y = -1$ , de unde  $y = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

În concluzie, ecuația dată este satisfăcută pentru valorile:  $x = \pm 1$ ,  $y = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

31. Să se rezolve ecuația:

$$\cos \frac{\pi x}{31} \cos \frac{2\pi x}{31} \cos \frac{4\pi x}{31} \cos \frac{8\pi x}{31} \cos \frac{16\pi x}{31} = \frac{1}{32}.$$

*Soluție.* Înmulțind ambii membri ai ecuației cu  $32 \sin \frac{\pi x}{31}$  și aplicînd de cîteva ori formula  $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha$ , obținem:

$$\sin \frac{32\pi x}{31} = \sin \frac{\pi x}{31}, \quad (1)$$

de unde:

$$\frac{32\pi x}{31} = \frac{\pi x}{31} + k2\pi; \quad \frac{32\pi x}{31} = \pi - \frac{\pi x}{31} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \text{ și deci: } x = \{2k\} \cup \left\{ \frac{31}{33}(2k+1) \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Deoarece în rezolvare am înmulțit ambii membri ai ecuației cu factorul  $32 \sin \frac{\pi}{31}$ , care se poate anula, ecuația (1) poate să aibă rădăcini care să nu satisfacă ecuația inițială. Rădăcinile străine sînt acele și numai acele rădăcini ale ecuației:

$$\sin \frac{\pi x}{31} = 0, \text{ care nu satisfac ecuația inițială.} \quad (2)$$

Rădăcinile ecuației (2) sînt:  $x = 31 k' \ (k' \in \mathbb{Z})$  și, după cum se constată ușor, nu verifică ecuația inițială. (3)

De aceea, dintre rădăcinile ecuației (1) trebuie excluse acelea care au forma (3).

Dacă  $2k = 31k'$ , atunci  $k' = 2l \ (l \in \mathbb{Z})$  și deci  $k = 31l$ ; dacă  $\frac{31}{33} (2k + 1) = 31k'$  sau  $2k + 1 = 33k'$ , atunci  $k' = 2l + 1$  și deci  $k = 33l + 16 \ (l \in \mathbb{Z})$ .

Așadar, ecuația inițială are rădăcinile:  $x = 2k$ , unde  $k \neq 31l$  și

$$x = \frac{31}{33} (2k + 1), \text{ unde } k \neq 33l + 16, \ l \text{ fiind un număr întreg arbitrar.}$$

### 32. Să se rezolve ecuația:

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x = \frac{1}{2}.$$

*Soluție.* Înmulțind ambii membri ai ecuației cu  $2 \sin x$  și transformînd produsele în sume, se obține ecuația:  $\sin 4x - \sin 3x = 0$ , de unde:  $x = \{k2\pi\} \cup \left\{ \frac{\pi}{7} + k \frac{2\pi}{7} \right\} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

Însă prin înmulțirea ambilor termeni ai unei ecuații cu un factor care se poate anula se pot introduce soluții străine, și anume rădăcinile factorului care nu sînt rădăcini ale ecuației. În cazul de față, factorul  $2 \sin x$  se anulează pentru  $x = k'\pi \ (k' \in \mathbb{Z})$  și, evident,  $\cos k'\pi - \cos 2k'\pi + \cos 3k'\pi \neq \frac{1}{2}$ . Prin urmare, rădăcinile ecuației de forma  $k'\pi$  sînt străine.

Deoarece  $\{k2\pi\} \subset \{k'\pi\}$ , rezultă că rădăcinile  $x = k2\pi$  sînt străine.

Mai departe, dacă  $\frac{\pi}{7} + k \frac{2\pi}{7} = k'\pi$ , atunci  $k' = 2l + 1 \ (l \in \mathbb{Z})$  și deci:

$$k = 7l + 3.$$

În concluzie, ecuația dată are rădăcinile:  $x = \frac{\pi}{7} + k \frac{2\pi}{7}$ , unde  $k \neq 7l + 3$ , iar  $l$  este un număr întreg arbitrar.

### 33. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^3 x + \sin^3 2x + \sin^3 3x = (\sin x + \sin 2x + \sin 3x)^3.$$

*Soluție.* Folosind identitatea:  $(u + v + w)^3 - u^3 - v^3 - w^3 = 3(u + v)(v + w)(w + u)$ , ecuația se scrie sub forma:  $(\sin x + \sin 2x)(\sin 2x + \sin 3x)(\sin 3x + \sin x) = 0$  sau, după transformarea sumelor de sinusuri în produse, sub forma:  $\sin \frac{3x}{2} \sin 2x \sin \frac{5x}{2} \cos x \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ ,

de unde:  $x = \left\{ k \frac{2\pi}{3} \right\} \cup \left\{ k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ k \frac{2\pi}{5} \right\} \ (k \in \mathbb{Z})$ .

*Observație.* Mulțimea rădăcinilor ecuației  $\cos x \cos^2 \frac{x}{2} = 0$  este inclusă în mulțimea rădăcinilor ecuației  $\sin 2x = 0$ .

### 34. Să se rezolve ecuația:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a} \ (ab \neq 0).$$

*Soluție.* Conform unei proprietăți a rapoartelor egale, putem scrie:

$$\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a} = \frac{a \sin x + b - (a \cos x + b)}{b \cos x + a - (b \sin x + a)} = \frac{a (\sin x - \cos x)}{b (\cos x - \sin x)}.$$

Distingem două cazuri: a)  $\sin x - \cos x = 0$ ; b)  $\sin x - \cos x \neq 0$ . În cazul a) ecuația se reduce la identitatea evidentă:  $\frac{a \sin x + b}{b \sin x + a} = \frac{a \sin x + b}{b \sin x + a}$ , deci rădăcinile ecuației a) sînt rădăcini ale ecuației date.

În cazul b) obținem:  $\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = \frac{a \cos x + b}{b \sin x + a} = -\frac{a}{b}$

sau, egalînd primul raport cu ultimul:  $\frac{a \sin x + b}{b \cos x + a} = -\frac{a}{b}$

sau încă, ținînd seama că numitorii fracțiilor sînt nenuli:  $\sin x + \cos x = -\frac{a^2 + b^2}{ab}$ .

Egalitatea precedentă este însă imposibilă. Într-adevăr:  $\left| -\frac{a^2 + b^2}{ab} \right| = \frac{a^2 + b^2}{|a| \cdot |b|} \geq 2$ ,

în timp ce:  $\left| \sin x + \cos x \right| = \left| \sin x + \sin \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \right| = \sqrt{2} \left| \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$ .

În concluzie, ecuația dată este echivalentă cu ecuația a) și are deci rădăcinile:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**35. Să se rezolve ecuația:**

$$(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5.$$

*Soluție.* Din inegalitățile:  $|\cos 4x - \cos 2x| \leq |\cos 4x| + |\cos 2x| \leq 1 + 1 = 2$ ;  $|\sin 3x + 5| = \sin 3x + 5 \geq -1 + 5 = 4$  rezultă că cei doi membri ai ecuației sînt egali dacă și numai dacă:  $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 4$  și  $\sin 3x + 5 = 4$ .

Folosind identitatea  $\cos 4x = 2 \cos^2 2x - 1$ , se deduce că prima ecuație este echivalentă cu următoarea:  $\cos 2x = -1$ .

Așadar, rădăcinile ecuației date sînt rădăcinile comune ale ecuațiilor:  $\sin 3x = -1$ ;  $\cos 2x = -1$ .

Rezolvînd ultimele ecuații, problema revine la determinarea elementelor comune ale mulțimilor:

$$\left\{ -\frac{\pi}{6} + k_1 \frac{2\pi}{3} \right\}; \quad \left\{ \frac{\pi}{2} + k_2 \pi \right\} (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}).$$

Din egalitatea:  $-\frac{\pi}{6} + k_1 \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k_2 \pi$ , obținem:  $k_2 = \frac{2(k_1 - 1)}{3}$ , deci:  $k_1 - 1 = 3k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

În consecință, ecuația dată are rădăcinile:  $x = -\frac{\pi}{6} + (3k + 1) \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**36. Să se demonstreze că ecuația**

$$(\sin x + \sqrt{3} \cos x)^2 \sin^2 4x = 4 \text{ nu admite soluții.}$$

*Soluție.* Scriînd  $\sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3}$ , ecuația capătă forma:  $\sin^2 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) \sin^2 4x = 1$ .

Ultima egalitate este posibilă numai în cazul în care:  $\sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \pm 1$  și  $\sin 4x = \pm 1$ ,

de unde:  $x = -\frac{\pi}{3} \pm \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi$  și  $x = \frac{1}{4} \left( \pm \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi \right)$  ( $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ ).

Egalînd cele două valori, se ajunge la egalitatea:  $-\frac{1}{3} \pm \frac{1}{2} + 2k_1 = \pm \frac{1}{8} + \frac{1}{2} k_2$  sau, după înmulțirea cu 24:  $12k_2 - 48k_1 = -8 \pm 9$ .

Observind că membrul sting este un număr par, iar membrul drept un număr impar, rezultă că ultima ecuație nu admite soluții, c.c.t.d.

**37. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin^n x + \cos^n x = 1, \quad (1)$$

unde  $n$  este un număr natural.

*Soluție.* Pentru  $n = 1$ , ecuația (1) devine:  $\sin x + \cos x = 1$  sau:  $\cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$\text{de unde: } x = \left\{ k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pentru  $n = 2$  se obține identitatea:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , care este satisfăcută pentru orice  $x$ .

Dacă  $n \geq 3$ , considerăm următoarele cazuri: a)  $n = 2p$  ( $p = 2, 3, 4, \dots$ ), căruia îi corespunde ecuația:  $\sin^{2p} x + \cos^{2p} x = 1$ , care, evident, admite soluțiile  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). (2)

Presupunind  $x \neq k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), din inegalitățile:  $\sin^2 x < 1$ ;  $\cos^2 x < 1$  rezultă că:  $(\sin^2 x)^p < \sin^2 x$ ;  $(\cos^2 x)^p < \cos^2 x$  sau, adunind inegalitățile precedente:  $\sin^{2p} x + \cos^{2p} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Așadar, ecuația (2) admite numai soluțiile  $x = k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). b)  $n = 2p + 1$  ( $p = 1, 2, 3, \dots$ ), căruia îi corespunde ecuația:  $\sin^{2p+1} x + \cos^{2p+1} x = 1$ . (3)

Dacă  $x \neq k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), din inegalitățile:  $\sin^{2p-1} x < 1$ ,  $\cos^{2p-1} x < 1$  rezultă că:  $\sin^{2p+1} x + \cos^{2p+1} x = \sin^2 x \sin^{2p-1} x + \cos^2 x \cos^{2p-1} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , deci ecuația (3) nu admite soluții de forma  $x \neq k \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Pe de altă parte:

$\left\{ k \frac{\pi}{2} \right\} = \left\{ k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} \cup \left\{ \pi + k2\pi \right\} \cup \left\{ 3 \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) și, după cum se constată ușor, ecuația (3) este verificată numai de valorile

$$x = \left\{ k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

În concluzie, ecuația (1) admite soluțiile:  $x = \left\{ k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ , pentru  $n$  impar, și:  $x = k \frac{\pi}{2}$ , pentru  $n$  par ( $n \neq 2$ ),  $k$  fiind un număr întreg arbitrar.

**38. Să se demonstreze că rădăcinile  $x_1, x_2$  ale ecuației:**

$$x^2 - 2x \sin \varphi + (2 - \sqrt{3})(1 - 4 \cos^2 \varphi) = 0$$

sînt reale. Să se discute natura rădăcinilor cînd  $\varphi \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ .

*Soluție.* Însemnînd cu  $\Delta$  realizantul ecuației, obținem:  $\Delta = 4[(7 - 4\sqrt{3}) \cos^2 \varphi - 1 + \sqrt{3}] \geq 4(\sqrt{3} - 1) > 0$ , deci  $x_1$  și  $x_2$  sînt numere reale distincte.

Mai departe, suma și produsul rădăcinilor sînt date de expresiile:  $x_1 + x_2 = 2 \sin \varphi$ ;  $x_1 x_2 = (2 - \sqrt{3})(1 + 2 \cos \varphi)(1 - 2 \cos \varphi)$ .

De aici rezultă că:  $x_1 + x_2 = 0$  pentru  $\varphi = 0$ ,  $x_1 + x_2 > 0$  pentru  $\varphi \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right]$ ;  $x_1 x_2 < 0$  pentru  $\varphi \in \left( 0, \frac{\pi}{3} \right)$ ;  $x_1 x_2 = 0$  pentru  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ ,  $x_1 x_2 > 0$  pentru  $\varphi \in \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ .

Prin urmare: dacă  $\varphi = 0$ , atunci  $x_2 = -x_1 \neq 0$ ; dacă  $\varphi \in \left( 0, \frac{\pi}{3} \right)$ , atunci  $x_1 > 0$ ,  $x_2 < 0$  și  $x_1 > |x_2|$ ; dacă  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , atunci  $x_1 > 0$ ,  $x_2 = 0$ ; dacă  $\varphi \in \left( \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} \right]$ , atunci  $x_1 > 0$ ,  $x_2 > 0$ .

### 39. Pentru ce valori ale lui $\alpha$ ecuația

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = \alpha$$

are rădăcini? Să se determine aceste rădăcini.

*Soluție.* Făcând substituția  $\operatorname{tg} x = t$ , ecuația devine:  $\frac{t^2}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} - 2 \frac{1}{1+t^2} = \alpha$  sau:  $(1-\alpha)t^2 - t - (\alpha+2) = 0$ . (1)

Dacă  $\alpha = 1$ , atunci ecuația dată este echivalentă cu următoarea:  $\cos x (\sin x + 3 \cos x) = 0$ , de unde:  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\operatorname{arctg} 3 + k\pi \right\} (k \in \mathbb{Z})$ .

Dacă  $\alpha \neq 1$ , atunci, din condiția de realitate a rădăcinilor ecuației (1):  $-4\alpha^2 - 4\alpha + 9 \geq 0$ , obținem:  $\alpha \in \left[ -\frac{\sqrt{10}+1}{2}, 1 \right) \cup \left( 1, \frac{\sqrt{10}-1}{2} \right]$ .

Pentru o astfel de valoare a lui  $\alpha$ , ecuația dată admite rădăcinile:  $x = \{\operatorname{arctg} t_1 + k\pi\} \cup \{\operatorname{arctg} t_2 + k\pi\} (k \in \mathbb{Z})$ , unde  $t_1$  și  $t_2$  sînt rădăcinile ecuației (1).

### 40. Să se determine valorile lui $m$ pentru care ecuația

$$m \cos^2 x + (2m^2 - m + 1) \sin x - 3m + 1 = 0$$

are rădăcini. Să se găsească aceste rădăcini.

*Soluție.* Folosind identitatea  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ , ecuația se scrie:

$$m \sin^2 x - (2m^2 - m + 1) \sin x + 2m - 1 = 0. \quad (1)$$

Distingem următoarele cazuri: a)  $m = 0$ , în care caz ecuația (1) devine:  $\sin x + 1 = 0$  și admite rădăcinile:  $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ . b)  $m \neq 0$ . În acest caz, ecuația (1) se descompune în următoarele:  $\sin x = 2m - 1$ ;  $\sin x = \frac{1}{m}$ . (2)

Ecuația dată admite rădăcini în următoarele cazuri:

$$1^\circ \left| 2m - 1 \right| \leq 1 \text{ și } \left| \frac{1}{m} \right| \leq 1; \quad 2^\circ \left| 2m - 1 \right| \leq 1 \text{ și } \left| \frac{1}{m} \right| > 1; \quad 3^\circ \left| 2m - 1 \right| > 1 \text{ și } \left| \frac{1}{m} \right| \leq 1.$$

Rezolvînd sistemele de inecuații de mai sus, obținem soluțiile:  $m = 1$  în primul caz, deci ecuațiile (2) se reduc la ecuația:  $\sin x = 1$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;  $m \in (0, 1)$  în al doilea caz, deci ecuația (1) este echivalentă cu ecuația:  $\sin x = 2m - 1$ , de unde:  $x = (-1)^k \arcsin(2m - 1) + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ;  $m \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$  în al treilea caz, deci ecuația (1) este echivalentă cu ecuația:  $\sin x = \frac{1}{m}$ , de unde:  $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{m} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Dacă  $m \in (-1, 0)$ , ecuația (1) nu admite rădăcini.

### 41. Să se rezolve ecuația:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + \alpha = 0.$$

*Soluție.* Folosind identitatea  $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$  și făcînd substituția  $\sin 2x = t$ , ecuația devine:

$$f(t) = t^2 - 2t - 2(1 + \alpha) = 0. \quad (1)$$

Pentru ca ecuația (1) să admită rădăcini trebuie ca realizantul său să fie nenegativ și cel puțin una din rădăcini, în valoare absolută, să nu depășească unitatea.

Această problemă este însă un caz particular al următoarei.

Fie:

$$f(t) = t^2 + pt + q$$

un polinom de gradul al doilea cu coeficienții  $p, q$  funcții de un parametru  $\alpha$  și  $t_1 \leq t_2$  rădăcinile sale (reale).

Dacă  $a < b$  sînt două numere date, problema determinării parametrului  $\alpha$  astfel ca cel puțin una din rădăcinile  $t_1, t_2$  să aparțină segmentului  $[a, b]$  revine la rezolvarea următoarelor sisteme de inecuații:

$$\begin{cases} \Delta = p^2 - 4q \geq 0, \\ f(a) \geq 0, \\ f(b) \geq 0, \\ a \leq \frac{t_1 + t_2}{2} \leq b, \end{cases} \quad (I)$$

dacă  $t_1, t_2 \in [a, b]$ ;

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ f(a) \geq 0, \\ f(b) < 0, \\ \frac{a+b}{2} < \frac{t_1+t_2}{2} \end{cases} \quad (II)$$

dacă  $t_1 \in [a, b]$  și  $t_2 \in (b, \infty)$ ;

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ f(a) < 0, \\ f(b) \geq 0, \\ \frac{a+b}{2} > \frac{t_1+t_2}{2}, \end{cases} \quad (III)$$

dacă  $t_2 \in (a, b]$  și  $t_1 \in (-\infty, a)$ .

În cazul ecuației (1),  $a = -1$ ,  $b = 1$  și deci:  $\Delta = 4(2\alpha + 3)$ ;  $f(a) = -2\alpha + 1$ ;  $f(b) = -2\alpha - 3$ ;  $\frac{a+b}{2} = 0$ ;  $\frac{t_1+t_2}{2} = 1$ . Sistemul (I) devine:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 \geq 0, \\ -2\alpha + 1 \geq 0, \\ -2\alpha - 3 \geq 0, \end{cases}$$

și admite soluția  $\alpha = -\frac{3}{2}$ , deci ecuația (1) are rădăcina dublă  $t = 1 \in [-1, 1]$ , de unde:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Sistemul (II) devine:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3 > 0, \\ -2\alpha + 1 \geq 0, \\ -2\alpha - 3 < 0 \end{cases}$$

și admite soluțiile  $\alpha \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , deci pentru aceste valori ale parametrului  $\alpha$ ,  $t_1 \in [-1, 1)$ ,

iar  $t_2 \in (1, \infty)$ . Ecuația (1) este echivalentă cu următoarea:  $t_1 = \sin 2x = 1 - \sqrt{2\alpha + 3}$ ,

de unde:  $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin(1 - \sqrt{2\alpha + 3}) + k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Sistemul (III) este incompatibil fiindcă  $0 = \frac{a+b}{2} < \frac{t_1+t_2}{2} = 1$ .

Prin urmare, cea mai mare rădăcină a ecuației (1) nu aparține intervalului  $(-1, 1]$ .



În concluzie, dacă  $\alpha \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ , ecuația dată are rădăcinile:  $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \left(1 - \sqrt{2\alpha + 3}\right) + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .

Pentru  $\alpha \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ , ecuația nu are rădăcini.

**42. Să se determine valorile lui  $m$  pentru care ecuația**  

$$\sin x \sin 3x = m$$

**admite rădăcini. Să se găsească aceste rădăcini.**

*Soluție.* Transformind membrul stâng al ecuației, obținem ecuația echivalentă:  $\cos 2x - \cos 4x = 2m$  sau, folosind formula cosinusului unghiului dublu:  $2 \cos^2 2x - \cos 2x + 2m - 1 = 0$ .

Notînd  $\cos 2x = t$ , ultima ecuație capătă forma:  $f(t) = 2t^2 - t + 2m - 1 = 0$ . (1)

Ecuația dată admite rădăcini atunci și numai atunci cînd  $t_1 \leq t_2$ , rădăcinile ecuației (1), sînt reale și modulele lor nu depășesc unitatea.

Pentru cele ce urmează sînt necesare următoarele elemente:

$$\Delta = -16m + 9; \quad f(-1) = 2m + 2; \quad f(1) = 2m; \quad \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4}.$$

Condițiile  $t_1 \in [-1, 1]$ ,  $t_2 \in [-1, 1]$  sînt echivalente cu sistemul:

$$\begin{cases} -16m + 9 \geq 0, \\ 2m + 2 \geq 0, \\ 2m \geq 0 \end{cases}$$

care admite soluțiile  $m \in \left[0, \frac{9}{16}\right]$ . În acest caz, ecuația dată se reduce la ecuațiile:  $\cos 2x =$

$$= t_1 = \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4}; \quad \cos 2x = t_2 = \frac{1 + \sqrt{9 - 16m}}{4}, \text{ de unde: } x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Dacă  $t_1 \in [-1, 1]$  și  $t_2 \in (1, \infty)$ , se obține sistemul:

$$\begin{cases} -16m + 9 > 0, \\ 2m + 2 \geq 0, \\ 2m < 0 \end{cases}$$

care admite soluțiile  $m \in [-1, 0)$ . Ecuația dată este echivalentă cu următoarea:  $\cos 2x = t_1 =$

$$= \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4}, \text{ de unde: } x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{În sfîrșit, cazul } t_2 \in (-1, 1], t_1 \in (-\infty, -1) \text{ nu este posibil fiindcă } \frac{t_1 + t_2}{2} = \frac{1}{4} > 0 = \frac{-1 + 1}{2}.$$

În concluzie, ecuația dată admite soluțiile:  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 \pm \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , dacă  $m \in \left[0, \frac{9}{16}\right]$  și  $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1 - \sqrt{9 - 16m}}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ , dacă  $m \in [-1, 0)$ .

Pentru  $m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{9}{16}, \infty\right)$ , ecuația nu admite soluții.

**43. Să se rezolve ecuația:**

$$\arcsin x + \arccos(1 - x) = \arcsin(-x).$$

*Soluție.* Ținând seama de identitatea  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ , ecuația devine:

$$2 \arcsin x = -\arccos(1-x).$$

Egalând cosinusurile ambilor membri ai ultimei ecuații, obținem:  $\cos(2 \arcsin x) = 1-x$  sau:  $1-2x^2 = 1-x$ , de unde:  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ .

Introducând aceste valori în ecuația dată, constatăm că numai  $x_1$  este rădăcină. Valoarea  $x_2$  este rădăcina ecuației:  $\arcsin x - \arccos(1-x) = \arcsin(-x)$ .

**44. Să se rezolve ecuația:**

$$\sin(2 \arcsin x) = \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x).$$

*Soluție.* Ținând seama de identitățile:  $\sin(\arcsin x) = x$ ,  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$ ;  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$  și de funcțiile trigonometrice ale unghiului dublu, obținem:  $\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x \sqrt{1-x^2}$ ;  $\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1-x^2}$ .

Prin urmare, ecuația dată este echivalentă cu următoarea:  $2x \sqrt{1-x^2} = \frac{2x}{1-x^2}$ , de unde:  $x = 0$ .

**45. Să se rezolve ecuația:**

$$2 \arcsin x = \arccos 2x. \quad (1)$$

*Soluție.* Luând cosinusul ambilor membri ai ecuației (1), obținem:

$$\cos(2 \arcsin x) = \cos(\arccos 2x) \quad (2)$$

sau:  $1-2\sin^2(\arcsin x) = 2x$ ;  $1-2x^2 = 2x$ , de unde:  $x_1 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$ .

Fiindcă ecuația (2) admite rădăcini care pot fi străine pentru ecuația (1), este necesară o discuție suplimentară. Domeniul de definiție al funcției  $2 \arcsin x - \arccos 2x$  se stabilește intersectând domeniile de definiție ale funcțiilor  $2 \arcsin x$  și  $\arccos 2x$ . Obținem:

$$\{|x| \leq 1\} \cap \{|2x| \leq 1\} = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

De aici rezultă că  $x_1$  este rădăcină străină ecuației (1).

## Sisteme de ecuații trigonometrice

**46. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \sin x + 2 \cos x = 1, \\ x + y = 2\pi. \end{cases}$$

*Soluție.* Notind  $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ , prima ecuație a sistemului devine:  $\sin(x + \varphi) = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

de unde:  $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Substituind valoarea lui  $x$  în ultima ecuație a sistemului, obținem:  $y = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{\sqrt{5}} + \operatorname{arctg} 2 + (2-k)\pi$ .

**47. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0, \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0. \end{cases}$$

*Soluție.* Sistemul poate fi scris sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} \cos a(1 + \cos x + \cos y) - \sin a(\sin x + \sin y) = 0, \\ \sin a(1 + \cos x + \cos y) + \cos a(\sin x + \sin y) = 0, \end{cases}$$

de unde, ținând seama de faptul că funcțiile  $\sin a$  și  $\cos a$  nu se anulează pentru aceeași valoare a argumentului:  $1 + \cos x + \cos y = \sin x + \sin y = 0$ . (1)

Ecuția  $\sin y = \sin(-x)$  se descompune în două:  $y = -x + k2\pi$ ;  $y = \pi + x + k2\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Prin urmare, sistemul (1) este echivalent cu următoarele:

$$\begin{cases} y = -x + k2\pi, \\ 1 + \cos x + \cos y = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} y = \pi + x + k2\pi, \\ 1 + \cos x + \cos y = 0. \end{cases}$$

Al doilea sistem este incompatibil, iar primul admite soluțiile:

$$x = 2\frac{\pi}{3} + l2\pi, y = -2\frac{\pi}{3} + m2\pi; \quad x = -2\frac{\pi}{3} + l2\pi, y = 2\frac{\pi}{3} + m2\pi, \text{ unde } l, m \in \mathbb{Z}.$$

**48. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \cos(3x + y) = \sin(-x + 3y), \\ \cos(3x - y) = \sin(x + 3y). \end{cases}$$

*Soluție.* Sistemul este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \cos(3x + y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (-x + 3y)\right], \\ \cos(3x - y) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (x + 3y)\right], \end{cases}$$

de unde: 
$$\begin{cases} 3x + y = \pm\left(\frac{\pi}{2} + x - 3y\right) + k2\pi, \\ 3x - y = \pm\left(\frac{\pi}{2} - x - 3y\right) + l2\pi. \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

Așadar, sistemul dat are soluțiile:  $x = \frac{\pi}{12} + (2l - k)\frac{\pi}{3}$ ,  $y = \frac{\pi}{12} + (2k - l)\frac{\pi}{3}$ ;  $x = (k + l)\frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{\pi}{8} + (k - l)\frac{\pi}{4}$ ;  $x = (k + l)\frac{\pi}{4}$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + (l - k)\frac{\pi}{2}$ ;  $x = -\frac{\pi}{12} + (2k - l)\frac{\pi}{3}$ ,  $y = \frac{\pi}{12} + (k - 2l)\frac{\pi}{3}$ .

**49. Să se determine soluțiile sistemului**

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(x - y) = 0 \end{cases}$$

care satisfac condițiile:  $0 \leq x, y \leq \pi$ .

*Soluție.* Sistemul este echivalent cu următorul:  $\begin{cases} x + y = k\pi, \\ x - y = l\pi, \end{cases}$  de unde:  $x = (k + l)\frac{\pi}{2}$ ,  $y = (k - l)\frac{\pi}{2}$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

Însă din condițiile problemei obținem:  $0 \leq k + l \leq 2$ ,  $0 \leq k - l \leq 2$ .

Aceste inegalități sînt satisfăcute de următoarele 5 perechi de valori  $k, l$ :  $k = 0, l = 0$ ;  $k = 1, l = 0$ ;  $k = 1, l = -1$ ;  $k = 1, l = 1$ ;  $k = 2, l = 0$ .

Prin urmare, se obțin soluțiile:  $x_1 = 0, y_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{\pi}{2}, y_2 = \frac{\pi}{2}$ ;  $x_3 = 0, y_3 = \pi$ ;  $x_4 = \pi, y_4 = 0$ ;  $x_5 = \pi, y_5 = \pi$ .

50. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 2 \cos x \cos y = 1, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2. \end{cases} \quad (1)$$

*Soluție.* Scriem sistemul sub forma echivalentă: 
$$\begin{cases} \cos(x+y) + \cos(x-y) = 1, \\ \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y} = 2. \end{cases} \quad (2)$$

Ținând seama de prima ecuație a sistemului (1), ecuația a doua a sistemului (2) devine:

$$\sin(x+y) = 1, \text{ de unde: } x+y = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \quad (3)$$

Substituind valoarea lui  $x+y$  din (3) în prima ecuație a sistemului (2), obținem:

$$\cos(x-y) = 1, \text{ de unde: } x-y = l2\pi \quad (l \in \mathbb{Z}). \quad (4)$$

Așadar, sistemul (1) este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x-y = l2\pi, \end{cases} \quad \text{de unde: } x = \frac{\pi}{4} + (k+l)\pi, \quad y = \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi.$$

51. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x = \operatorname{cosec} x + \sin y, \\ \cos x = \sec x + \cos y. \end{cases}$$

*Soluție.* Aducem sistemul la forma: 
$$\begin{cases} \sin^2 x = 1 + \sin x \sin y, \\ \cos^2 x = 1 + \cos x \cos y. \end{cases}$$

Adunând și scăzând membru cu membru ecuațiile sistemului precedent, obținem sistemul:

$$\begin{cases} 1 + \cos(x-y) = 0, \\ \cos(x+y) - \cos 2x = 0 \end{cases} \quad \text{sau, folosind identități cunoscute: } \begin{cases} 2 \cos^2 \frac{x-y}{2} = 0, \\ 2 \sin \frac{3x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} = 0. \end{cases}$$

Ținând seama de faptul că funcțiile  $\cos$  și  $\sin$  nu se anulează pentru aceeași valoare a argumentului, obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} \cos \frac{x-y}{2} = 0, \\ \sin \frac{3x+y}{2} = 0, \end{cases} \quad \text{de unde: } \begin{cases} \frac{x-y}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \frac{3x+y}{2} = l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \quad \text{și deci: } x = \frac{\pi}{4} + (l+k) \frac{\pi}{2},$$

$$y = -3 \frac{\pi}{4} + (l-3k) \frac{\pi}{2}.$$

52. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin y = 2 \sin x, \\ 2 \cos x + \cos y = \sqrt{3}. \end{cases} \quad (1)$$

*Soluție.* Scriind sistemul sub forma: 
$$\begin{cases} \sin y = 2 \sin x \\ \cos y = \sqrt{3} - 2 \cos x \end{cases}$$
 și adunând pătratele ecuațiilor, obținem ecuația: 
$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (2)$$

Substituind valoarea lui  $\cos x$  în a doua ecuație a sistemului (1), găsim: 
$$\cos y = 0. \quad (3)$$

$$\begin{array}{l} \text{Prin urmare, am obținut} \\ \text{sistemul echivalent:} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \sin y = 2 \sin x, \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = 0. \end{array} \right. \quad (4)$$

Din ultimele două ecuații ale sistemului precedent obținem:  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{2} + l\pi$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

Substituind aceste valori ale lui  $x$  și  $y$  în prima ecuație a sistemului (4), se determină soluțiile sistemului inițial:  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{2} + m2\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{2} + (2m+1)\pi$ , unde  $k, m \in \mathbb{Z}$ .

53. Să se rezolve sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin^4 x = \frac{1}{2} \sin y, \\ \cos^3 x = \frac{1}{2} \cos y. \end{array} \right.$$

*Soluție.* Ridicând la pătrat ecuațiile sistemului, adunându-le membru cu membru și folosind identitatea:  $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 2x$ , obținem ecuația:  $\sin^2 2x = 1$ .

Dacă  $\sin 2x = 1$ , atunci  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$  sau  $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ .

În primul caz, din sistemul inițial găsim  $\sin y = \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , adică  $y = \frac{\pi}{4} + l2\pi$ , iar

în al doilea caz  $\sin y = \cos y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , adică  $y = \pi + \frac{\pi}{4} + l2\pi$ .

Analog se studiază și cazul  $\sin 2x = -1$ .

Se obțin soluțiile:  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + l2\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + (2l+1)\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ ;  $y = -\frac{\pi}{4} + (2l+1)\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ ,  $y = -\frac{\pi}{4} + l2\pi$ , unde  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

54. Să se rezolve sistemul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin x \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

*Soluție.* Împărțind prima ecuație la a doua, obținem:  $\cos x \cos y = \frac{3}{4\sqrt{2}}$ . (1)

Adunând această ecuație cu prima și scăzând din (1) prima ecuație a sistemului, obținem următorul sistem, echivalent cu sistemul inițial:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos (x-y) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos (x+y) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \end{array} \right. \text{ de unde: } \left\{ \begin{array}{l} x-y = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, \\ x+y = \pm \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + l2\pi. \end{array} \right. \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \quad (2)$$

Corespunzător alegerii semnelor în ecuațiile (2), obținem soluțiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{8} + (k+l)\pi, \\ y = -\frac{1}{2} \arccos \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{8} + (l-k)\pi. \end{array} \right.$$

55. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \sin y, \\ \sqrt{3} \sin 2x = 2 \sin 2y. \end{cases}$$

Soluție. Scriem sistemul sub forma echivalentă: 
$$\begin{cases} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x, \\ \sqrt{3} \sin x \cos x = 2 \sin y \cos y. \end{cases} \quad (1)$$

Substituind valoarea lui  $\sin y$  din prima ecuație în a doua ecuație a sistemului (1), obținem ecuația:  $\sin x (\sqrt{3} \cos x - \sqrt{2} \cos y) = 0$ .

Prin urmare, sistemul (1) este echivalent cu următoarele:

$$\begin{cases} \sin x = 0; \\ \sin y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \\ \sqrt{2} \cos y = \sqrt{3} \cos x. \end{cases}$$

Primul sistem admite soluțiile  $x = k\pi, y = l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z})$ .

Adunând ecuațiile sistemului al doilea, obținem ecuația:  $\sqrt{2} (\sin y + \cos y) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$  sau, după transformări:  $\sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ , de unde:  $y - x + \frac{\pi}{12} = k2\pi \quad (2)$

$$\text{și: } y = -x + 5\frac{\pi}{12} + k2\pi. \quad (3)$$

Substituind valoarea lui  $y$  din (2) în prima ecuație a sistemului (1), obținem ecuația:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \text{ sau, dezvoltând primul membru și ținând seamă că: } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}; (\sqrt{3}-1)(\sin x + \cos x) = 0, \text{ de unde: } x = -\frac{\pi}{4} + l\pi.$$

Substituind valoarea lui  $x$  în (2), se obține:  $y = -\frac{\pi}{6} + (2k+l)\pi$ .

Procedind în mod analog cu valoarea lui  $y$  din (3), obținem ecuația:  $(\sqrt{3}+1)(\cos x - \sin x) = 0$ , de unde:  $x = \frac{\pi}{4} + l\pi$ .

Prin urmare:  $y = \frac{\pi}{6} + (2k-l)\pi$ . În concluzie, sistemul dat admite soluțiile:  $x = k\pi$ ,

$y = l\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{4} + l\pi, y = -\frac{\pi}{6} + (2k+l)\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + l\pi, y = \frac{\pi}{6} + (2k-l)\pi$ , unde  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

56. Să se rezolve sistemul:

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin(x-y)}{a-b}.$$

*Soluție.* Din ipoteză,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq b$ . Aplicând o proprietate a rapoartelor egale, sistemul poate fi scris sub forma:  $\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos x - \cos y}{a - b} = \frac{\sin(x - y)}{a - b}$ , de unde:

$$\begin{aligned} \cos x - \cos y &= \sin(x - y); \quad -2 \sin \frac{x - y}{2} \sin \frac{x + y}{2} = 2 \sin \frac{x - y}{2} \cos \frac{x + y}{2}; \\ 2 \sin \frac{x - y}{2} \left[ \cos \frac{x + y}{2} + \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{x + y}{2} \right) \right] &= 0; \quad 4 \sin \frac{x - y}{2} \cos \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{y}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Rezolvând ultima ecuație, obținem:  $x - y = k2\pi$ ,  $x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$ ,  $y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi$  ( $k, l, m \in \mathbb{Z}$ ).

Dacă  $x - y = k2\pi$ , revenind la sistemul inițial, se obține:  $\cos y = 0$ , de unde:

$$y = \frac{\pi}{2} + k'\pi \quad (k' \in \mathbb{Z}).$$

Deci, sistemul admite soluțiile:  $x = \frac{\pi}{2} + (2k + k')\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{2} + k'\pi$ .

Analog, pentru  $x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$  și  $y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi$ , se obțin soluțiile:  $x = 3\frac{\pi}{2} + l2\pi$ ,

$$y = \frac{\pi}{2} + l'\pi; \quad x = \frac{\pi}{2} + m'\pi, \quad y = 3\frac{\pi}{2} + m2\pi, \quad \text{unde } l', m' \in \mathbb{Z}.$$

*Observație.* Se poate arăta că soluțiile sistemului pot fi scrise sub forma concentrată:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + l\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

**57. Să se rezolve sistemul :**

$$\begin{cases} \sin x = \operatorname{tg} y, \\ \sin y = \operatorname{tg} x. \end{cases} \quad (1)$$

*Soluție.* Prin ipoteză,  $\cos x \neq 0$ ,  $\cos y \neq 0$ .

În aceste condiții, sistemul este echivalent cu următorul:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = \sin y, \\ \sin y \cos x = \sin x. \end{cases} \quad (2)$$

Adunând membru cu membru ecuațiile sistemului (2), obținem:  $\sin(x + y) = \sin x + \sin y$ ;  $2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x + y}{2} = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$ ;

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x + y}{2} \left( \cos \frac{x + y}{2} - \cos \frac{x - y}{2} \right) &= 0; \\ -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{de unde: } a) \sin \frac{x + y}{2} = 0; \quad b) \sin \frac{x}{2} = 0; \quad c) \sin \frac{y}{2} = 0.$$

Se observă că în toate cele trei cazuri sunt respectate condițiile (1).

În cazul a) se obține sistemul:

$$\begin{cases} x + y = k2\pi, \\ \sin y \cos x = \sin x; \end{cases} \quad \begin{cases} y = k2\pi - x, \\ -\sin x \cos x = \sin x, \end{cases}$$

de unde:  $x = l\pi$ ,  $y = (2k - l)\pi$ .

(3)

$$\text{În cazul b) se obține sistemul: } \begin{cases} \sin \frac{x}{2} = 0, \\ \sin y \cos x = \sin x \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{x}{2} = k\pi, \\ \sin y = 0, \end{cases}$$

de unde:  $x = k2\pi, y = l\pi$ .

(4)

În cazul c) se obține sistemul: 
$$\begin{cases} \sin \frac{y}{2} = 0, \\ \sin x \cos y = \sin y \end{cases}; \quad \begin{cases} \frac{y}{2} = k\pi, \\ \sin x = 0, \end{cases}$$

de unde:  $x = l\pi, y = k2\pi$ . (5)

Concentrind soluțiile (3), (4), (5), soluțiile sistemului dat se pot scrie sub forma:  $x = k\pi, y = l\pi$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

58. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = 2 \sin \left( y + \frac{\pi}{4} \right), \\ \operatorname{tg} y + \frac{1}{\operatorname{tg} y} = 2 \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right). \end{cases}$$

*Soluție.* Ținând seama de inegalitatea  $a^2 + b^2 \geq 2 |ab|$ , rezultă că:  $\left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right| \geq 2$ .

Pe de altă parte:  $\left| 2 \sin \left( y + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq 2$ .

Prin urmare, prima ecuație a sistemului este satisfăcută numai de acele valori  $x, y$  pentru care:

$$\left| \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right| = 2 \text{ și } \left| \sin \left( y + \frac{\pi}{4} \right) \right| = 1, \text{ adică: } \operatorname{tg} x = 1 \text{ și } \sin \left( y + \frac{\pi}{4} \right) = 1 \quad (1)$$

sau:  $\operatorname{tg} x = -1 \text{ și } \sin \left( y + \frac{\pi}{4} \right) = -1. \quad (2)$

Rezolvind sistemele (1) și (2), obținem:  $x = \frac{\pi}{4} + k'\pi, y = \frac{\pi}{4} + l'2\pi$  ( $k', l' \in \mathbb{Z}$ ); (3)

$$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, y = -\frac{3\pi}{4} + l2\pi \quad (k, l \in \mathbb{Z}) \quad (4)$$

Soluțiile (3) nu verifică a doua ecuație a sistemului inițial, iar soluțiile (4) o verifică numai pentru  $k = 2m + 1$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ).

Așadar, sistemul are soluțiile:  $x = 3\frac{\pi}{4} + m2\pi, y = -\frac{3\pi}{4} + l2\pi$ .

59. Să se determine valorile lui  $a$  pentru care sistemul

$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = a^2 + 1, \\ \cos x \sin 2y = a \end{cases} \quad (1)$$

are soluții și să se rezolve.

*Soluție.* Fiindcă membrul stâng al primei ecuații nu depășește unitatea, sistemul poate să aibă soluții numai pentru  $a = 0$ .

În acest caz, sistemul (1) devine: 
$$\begin{cases} \sin x \cos 2y = 1, \\ \cos x \sin 2y = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Adunând și scăzând membru cu membru ecuațiile sistemului (2), obținem:

$$\begin{cases} \sin(x + 2y) = 1, \\ \sin(x - 2y) = 1, \end{cases} \quad \text{de unde: } \begin{cases} x + 2y = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \\ x - 2y = \frac{\pi}{2} + l2\pi. \end{cases}$$

Prin urmare, sistemul admite soluțiile:  $x = \frac{\pi}{2} + (k + l)\pi, y = (k - l)\frac{\pi}{2}$ , unde  $k, l \in \mathbb{Z}$ .



60. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y = \varphi, \\ \cos x \cos y = a. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui  $a$  sistemul are soluții?

*Soluție.* Scriem a doua ecuație a sistemului [sub forma:  $\frac{1}{2} [\cos (x+y) + \cos (x-y)] = a$  sau, ținând seama de prima ecuație:  $\cos (x-y) = 2a - \cos \varphi$ .

În acest fel se obține sistemul:  $\begin{cases} x + y = \varphi, \\ x - y = \pm \arccos (2a - \cos \varphi) + k2\pi, \end{cases}$  cu condiția ca  $|2a - \cos \varphi| \leq 1$ . Prin urmare:  $x = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{1}{2} \arccos (2a - \cos \varphi) + k\pi$ ,  $y = \frac{\varphi}{2} \mp \frac{1}{2} \arccos (2a - \cos \varphi) - k\pi$ , semnele corespunzându-se, iar  $k$  fiind un număr întreg arbitrar.

61. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \cos (x - 2y) = a \cos^3 y, \\ \sin (x - 2y) = a \cos^3 y. \end{cases}$$

Pentru ce valori ale lui  $a$  sistemul are soluții?

*Soluție.* Ridicând la pătrat ecuațiile și adunându-le membru cu membru, obținem:  $1 = 2a^2 \cos^6 y$ .

De aici rezultă că  $a \neq 0$ ,  $\cos y \neq 0$ . Prin urmare, ecuațiile sistemului se pot împărți membru cu membru.

$$\text{Obținem: } \operatorname{tg} (x - 2y) = 1, \text{ de unde: } x - 2y = \frac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \quad (1)$$

Considerăm două cazuri: 1°  $k$  este par. Atunci avem:  $\cos (x - 2y) = \frac{1}{\sqrt{2}} = a \cos^3 y$ ;  $\cos y =$

$$= \sqrt[3]{\frac{1}{a\sqrt{2}}} = \lambda; \ y = \pm \arccos \lambda + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z}).$$

Introducând această valoare a lui  $y$  în (1), obținem:  $x = \pm 2 \arccos \lambda + (4l + k)\pi + \frac{\pi}{4}$ .

2°  $k$  este impar. În acest caz,  $\cos (x - 2y) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = a \cos^3 y$ ;  $y = \pm \arccos (-\lambda) + l2\pi \ (l \in \mathbb{Z})$ .

Din (1) găsim:  $x = \pm 2 \arccos (-\lambda) + (4l + k)\pi + \frac{\pi}{4}$ .

Sistemul admite soluții pentru  $\left| \frac{1}{a\sqrt{2}} \right| \leq 1$ , adică pentru  $|a| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

62. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{b}{c}. \end{cases} \quad (1)$$

*Soluție.* Prin ipoteză,  $\cos x \neq 0$ ,  $\sin y \neq 0$ ,  $\cos y \neq 0$ , adică:

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi, \ y \neq k_2 \frac{\pi}{2} \ (k_1, k_2 \in \mathbb{Z}). \quad (2)$$

Distingem două cazuri: 1°  $b \neq c$ . Aplicând o proprietate a rapoartelor egale, ecuația a doua a

$$\text{sistemului devine: } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y} = \frac{b+c}{b-c}; \ \frac{\sin (x+y)}{\sin (x-y)} = \frac{b+c}{b-c}$$

sau, ținând seama de prima:  $\sin(x+y) = \frac{b+c}{b-c} \sin a$ .

Așadar, sistemul (1) se reduce la următorul: 
$$\begin{cases} y - x = a, \\ \sin(x+y) = \frac{b+c}{b-c} \sin a. \end{cases} \quad (3)$$

Dacă  $\left| \frac{b+c}{b-c} \sin a \right| \leq 1$ , sistemul (3) este compatibil și echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x + y = (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c} \sin a\right) + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

de unde:  $x = \frac{1}{2} \left[ a + (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c} \sin a\right) \right] + k \frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{1}{2} \left[ -a + (-1)^k \arcsin\left(\frac{b+c}{b-c} \sin a\right) \right] + k \frac{\pi}{2}$ .  $2^\circ$   $b = c$ . A doua ecuație a sistemului (1) devine:  $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ ;  $x - y = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Prin urmare, sistemul (1) se reduce la următorul: 
$$\begin{cases} x - y = a, \\ x - y = k\pi. \end{cases}$$

Dacă  $a \neq k\pi$ , ultimul sistem este incompatibil; dacă  $a = k\pi$ , el se reduce la ecuația  $x - y = k\pi$ . Notînd  $y = t$  și ținînd seama de (2), rezultă că în acest caz sistemul are soluțiile:  $x = t + k\pi$ ,  $y = t$ , unde  $t$  este un număr real diferit de  $k_2 \frac{\pi}{2}$ .

**63. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 - \cos a. \end{cases}$$

*Soluție.* Folosind identitatea  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ , a doua ecuație a sistemului devine:

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos a$$

sau, transformînd primul membru în produs și ținînd seama de prima ecuație a sistemului:  $\cos a \cos(x-y) = \cos a$ .

Presupunînd  $\cos a \neq 0$ , ultima ecuație se scrie:  $\cos(x-y) = 1$ , de unde:  $x - y = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Prin urmare, se obține sistemul: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = k2\pi, \end{cases}$$
 cu soluțiile:  $x = \frac{a}{2} + k\pi$ ,  $y = \frac{a}{2} - k\pi$ .

În cazul  $\cos a = 0$  adică  $a = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ , se obține sistemul: 
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1. \end{cases}$$

Din prima ecuație a sistemului precedent obținem:  $y = \frac{\pi}{2} - x + k\pi$ , deci ecuația a doua se reduce la identitatea  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Notînd  $y = t$ , obținem soluțiile:  $x = -t + \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $y = t$ .

**64. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = b. \end{cases}$$

*Soluție.* Scriem sistemul sub forma echivalentă: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cos y} = b \end{cases}$$

sau, ținând seama de prima ecuație: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{\sin a}{\cos x \cos y} = b. \end{cases}$$

Distingem două cazuri:

1°  $b \neq 0$ . Sistemul precedent se poate scrie sub forma: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \cos x \cos y = \frac{\sin a}{b} \end{cases}$$
 sau, ținând seama

de identitatea  $\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$  și de prima ecuație:

$$\begin{cases} x + y = a, \\ \cos(x - y) = \frac{2 \sin a}{b} - \cos a. \end{cases}$$

Dacă  $\left| \frac{2 \sin a}{b} - \cos a \right| \leq 1$ , sistemul precedent admite soluții și este echivalent cu următo-

rul: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ x - y = \pm \arccos\left(\frac{2 \sin a}{b} - \cos a\right) + k2\pi, \end{cases}$$
 de unde:  $x = \frac{1}{2} \left[ a \pm \arccos\left(\frac{2 \sin a}{b} - \cos a\right) \right] + k\pi$ ,  $y = \frac{1}{2} \left[ a \mp \arccos\left(\frac{2 \sin a}{b} - \cos a\right) \right] - k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). 2°  $b = 0$ . Sistemul dat

devine: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \frac{\sin a}{\cos x \cos y} = 0. \end{cases}$$

Dacă  $\sin a = 0$ , adică  $a = k\pi$ , el se reduce la ecuația:  $x + y = k\pi$ .

Soluțiile sînt:  $x = t$ ,  $y = k\pi - t$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ),

unde  $t$  este un număr real diferit de  $\frac{\pi}{2} + k'\pi$  ( $k' \in \mathbb{Z}$ ) (altminteri, a doua ecuație a sistemului n-are sens).

În sfîrșit, dacă  $a \neq k\pi$ , sistemul este incompatibil.

**65. Să se elimine  $x$  și  $y$  din sistemul de ecuații:**

$$\begin{cases} a \sin^2 x + b \cos^2 x = 1, \\ a \cos^2 y + b \sin^2 y = 1, \\ a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y, \end{cases}$$

**presupunînd că sistemul este compatibil și  $a \neq b$ .**

*Soluție.* Observăm că  $\cos x \neq 0$ ,  $\cos y \neq 0$  (altminteri ecuația a treia a sistemului nu are sens). De aceea, primele două ecuații se pot aduce la forma:

$$(a - 1) \operatorname{tg}^2 x = 1 - b, \quad (1)$$

$$(b - 1) \operatorname{tg}^2 y = 1 - a. \quad (2)$$

Însă  $a \neq 1$  fiindcă dacă  $a = 1$  atunci din (1) am avea  $b = 1$ , ceea ce contrazice ipoteza  $a \neq b$ . Analog, dacă  $b = 1$ , atunci și  $a = 1$ .

Prin urmare, ecuațiile (1) și (2) se pot împărți membru cu membru.

Obținem:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

Să ne convingem acum că  $a \neq 0$ . Într-adevăr, dacă  $a = 0$ , atunci din a doua ecuație obținem  $\sin y \neq 0$ , iar din a treia  $b = 0$ , adică  $a = b = 0$ , ceea ce nu se poate.

Datorită acestei observații, din a treia ecuație găsim:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}. \text{ Prin urmare: } \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{1-b}{1-a}\right)^2.$$

$$\text{Dacă } \frac{b}{a} = \frac{1-b}{1-a}, \text{ atunci } a = b, \text{ ceea ce nu se poate; dacă însă } \frac{b}{a} = -\frac{1-b}{1-a},$$

atunci:  $a + b = 2ab$ ,

care este tocmai rezultatul eliminării lui  $x$  și  $y$  din sistemul dat.

**66. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} x = \sin y, \\ y = \sin z, \\ z = \sin x. \end{cases}$$

*Soluție.* Luând sinusul ambilor membri ai ultimei ecuații, obținem:  $\sin z = \sin \sin x$ , de unde, folosind a doua ecuație:  $y = \sin \sin x$ . Luând din nou sinusul ambilor membri ai ecuației precedente, obținem:  $\sin y = \sin \sin \sin x$ , de unde, ținând seama de prima ecuație a sistemului:  $x = \sin \sin \sin x$ . (1)

Se știe însă că  $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$ , egalitatea având loc numai pentru  $\alpha = 0$ .

Prin urmare:  $|\sin \sin \sin x| \leq |\sin \sin x| \leq |\sin x| \leq |x|$ . (2)

Din cele ce precedă rezultă că inegalitățile (2) se transformă în egalități numai pentru  $x = 0$  și deci ecuația (1) are soluția unică  $x = 0$ .

Ținând seama că sistemul este circular, rezultă:  $y = z = 0$ . În concluzie, sistemul admite soluția:  $x = y = z = 0$ .

**67. Să se rezolve sistemul:**

$$\begin{cases} \frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}, \\ x + y + z = \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

unde  $a > 0, b > 0, c > 0$ .

*Soluție.* Avem:  $z = \frac{\pi}{2} - (x + y)$ ,

de unde, luând cosinusul ambilor membri:  $\cos z = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ . (1)

Prin permutări circulare se obțin încă două relații analoge. Relația (1) fiind omogenă în raport cu cosinusurile, acestea pot fi înlocuite prin numere proporționale cu ele. În acest fel se obține sistemul:

$$\begin{cases} c = b \sin x + a \sin y, \\ a = c \sin y + b \sin z, \\ b = a \sin z + c \sin x. \end{cases}$$

Înmulțind prima ecuație cu  $c$ , a doua cu  $-a$ , a treia cu  $b$  și adunându-le, obținem:  $b^2 + c^2 - a^2 = 2bc \sin x$ , de unde:  $\sin x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ . (2)

$$\text{Analog: } \sin y = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}, \sin z = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (3)$$

Pentru ca ecuația (2) să aibă soluții, trebuie ca:  $-1 \leq \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \leq 1$ ,

de unde:  $(b + c)^2 - a^2 \geq 0$  și  $a^2 - (b - c)^2 \geq 0$  sau:  $b + c \geq a, c + a \geq b, a + b \geq c$ . (4)

Evident, ecuațiile (3) ne vor conduce la aceleași relații între  $a, b, c$ , de unde rezultă că (4) constituie condițiile necesare și suficiente ca sistemul dat să admită soluții.

Formulându-le altfel, rezultă că sistemul admite soluții atunci și numai atunci cînd cel mai mare dintre numerele  $a, b, c$  nu depășește suma celorlalte două.

Distingem două cazuri:

1° Cel mai mare dintre numerele  $a, b, c$  este strict mai mic decît suma celorlalte două. Atunci numerele  $a, b, c$  pot fi considerate lungimile laturilor unui triunghi cu unghiurile corespunzătoare  $\alpha, \beta, \gamma$  și ecuațiile (2), (3) devin:  $\sin x = \cos \alpha$ ,  $\sin y = \cos \beta$ ,  $\sin z = \cos \gamma$ , de unde:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k_1 2\pi \text{ sau } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} - \beta + k_2 2\pi \text{ sau } y = \frac{\pi}{2} + \beta + k_2 2\pi, \\ z = \frac{\pi}{2} - \gamma + k_3 2\pi \text{ sau } z = \frac{\pi}{2} + \gamma + k_3 2\pi, \quad k_1, k_2, k_3 \text{ fiind numere întregi arbitrare.} \quad (5)$$

Ținînd seama de relația  $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ , se obțin următoarele soluții:

$$x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} - \beta + k_2 2\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} - \gamma + k_3 2\pi, \text{ cu condiția } k_1 + k_2 + k_3 = 0$$

$$\text{și: } x = \frac{\pi}{2} + \alpha + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + \beta + k_2 2\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} + \gamma + k_3 2\pi,$$

cu condiția  $k_1 + k_2 + k_3 = -1$ .

2° Unul dintre numerele  $a, b, c$  este egal cu suma celorlalte două. Se constată imediat că ecuațiile (2) și (3) devin:

$$\begin{array}{llll} \sin x = -1, & \sin y = 1, & \sin z = 1, & \text{dacă } b + c = a; \\ \sin x = 1, & \sin y = -1, & \sin z = 1, & \text{dacă } c + a = b; \\ \sin x = 1, & \sin y = 1, & \sin z = -1, & \text{dacă } a + b = c. \end{array}$$

De aici rezultă soluțiile corespunzătoare:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi; \\ x &= \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \quad y = -\frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} + k_3 2\pi; \\ x &= \frac{\pi}{2} + k_1 2\pi, \quad y = \frac{\pi}{2} + k_2 2\pi, \quad z = -\frac{\pi}{2} + k_3 2\pi, \text{ cu condiția } k_1 + k_2 + k_3 = 0. \end{aligned}$$

68. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \arcsin x \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \arccos y = \frac{\pi^2}{24}. \end{cases}$$

*Soluție.* Folosind identitatea  $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ , prima ecuație a sistemului poate

fi scrisă sub forma:

$$\left( \frac{\pi}{2} - \arccos x \right) \left( \frac{\pi}{2} - \arccos y \right) = \frac{\pi^2}{12}. \quad (1)$$

Făcînd substituția  $\arccos x = u$ ,  $\arccos y = v$  și ținînd seama de (1), sistemul dat este echivalent cu următorul:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \left( \frac{\pi}{2} - v \right) = \frac{\pi^2}{12}, \\ uv = \frac{\pi^2}{24} \end{array} \right. \text{ sau: } \left\{ \begin{array}{l} u + v = 5 \frac{\pi}{12}, \\ uv = \frac{\pi^2}{24}. \end{array} \right.$$

Rezolvind ecuația  $z^2 - \frac{5\pi}{12}z + \frac{\pi^2}{24} = 0$ , obținem soluțiile sistemului precedent:

$$u = \frac{\pi}{6}, v = \frac{\pi}{4}; u = \frac{\pi}{4}, v = \frac{\pi}{6}.$$

Prin urmare, ținând seama de relațiile  $x = \cos u, y = \cos v: x = \frac{\sqrt{3}}{2}, y = \frac{\sqrt{2}}{2}; x = \frac{\sqrt{2}}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

## Inecuații trigonometrice

69. Să se rezolve inecuația:

$$\sin x + \cos x > 1.$$

*Soluție.* Transformând în produs membrul întâi, inecuația devine:  $\sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde:  $k2\pi + \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < k2\pi + 3\frac{\pi}{4} \ (k \in \mathbb{Z})$  și deci:  $x \in \left( k2\pi, k2\pi + \frac{\pi}{2} \right)$ .

70. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{1 - \sin x}{1 - 2 \sin x} < \frac{1 + \sin x}{1 - 4 \sin^2 x}.$$

*Soluție.* Trecând termenii în membrul drept și aducându-i la același numitor, inecuația devine:  $\frac{2 \sin^2 x}{1 - 4 \sin^2 x} > 0$ .

Însă  $\sin^2 x \geq 0$ . Prin urmare, inecuația precedentă este echivalentă cu următoarea:  $1 - 4 \sin^2 x > 0$  sau:  $|\sin x| < \frac{1}{2}$  sau încă:  $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$ , de unde:  $x \in \left( \frac{5\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi \right) \ (k \in \mathbb{Z})$ .

71. Să se rezolve inecuația:

$$|\sin x| \geq |\cos x|.$$

*Soluție.* Funcțiile  $|\sin x|$  și  $|\cos x|$  fiind periodice, cu perioada  $\pi$ , este suficient să se determine soluțiile inecuației din intervalul  $[0, \pi]$ .

Se constată ușor că  $x \in \left[ \frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4} \right]$ .

Prin urmare, inecuația dată admite soluțiile:  $x \in \left[ \frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi \right] \ (k \in \mathbb{Z})$ .

72. Să se rezolve inecuația.

$$\sin x > \cos^2 x.$$

*Soluție.* Inecuația este echivalentă cu următoarea:  $\sin^2 x + \sin x - 1 > 0$  sau, descompunând membrul stâng în factori:  $\left( \sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \left( \sin x - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) > 0$ . (1)

Însă  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 1$ , deci  $\sin x + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$ .

Prin urmare, inecuația (1) este echivalentă cu inecuația:  $\sin x > \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , de unde:  $x \in \left( k2\pi + \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2}, (2k + 1)\pi - \arcsin \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) \ (k \in \mathbb{Z})$ .

### 73. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{2 \sin^2 x}{2 \sin^2 x - 1} > -1.$$

**Soluție.** Inecuația se poate scrie sub forma echivalentă:  $\frac{4 \sin^2 x - 1}{2 \sin^2 x - 1} > 0$  sau, ținând seama de formula  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ :  $\frac{2 \cos 2x - 1}{\cos 2x} > 0$ . Funcția din membrul stâng al inecuației precedente este periodică, cu perioada  $\pi$ . De aceea este suficient să determinăm soluțiile inecuației din intervalul  $[0, \pi]$ .

Se poate alcătui tabelul următor:

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{6}$	$\pi$	
$2 \cos 2x - 1$	+	0	-	-	-	0	+
$\cos 2x$	+		+	0	-	0	+
$\frac{2 \cos 2x - 1}{\cos 2x}$	+	0	-	+	-	0	+

De aici se obțin soluțiile inecuației aparținând intervalului  $[0, \pi]$ :  $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(5\frac{\pi}{6}, \pi\right)$ .

Prin urmare, soluția generală este:  $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \cup \left(5\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi\right)$ , unde  $k$  este un număr întreg arbitrar.

### 74. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geq 0.$$

**Soluție.** Inecuația poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \geq 0.$$

Funcția din membrul stâng al inecuației precedente este periodică, cu perioada  $\pi$ . De aceea este suficient să determinăm soluțiile inecuației din intervalul  $[0, \pi]$ , care sînt date de tabelul alăturat:

Obținem următoarele soluții generale:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{4}$	$\pi$
$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$	+	+	0	-
$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	-	0	+	+
$\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$	-	+	0	-

75. Să se rezolve inecuația:

$$4 \sin^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 2 \sec^2 x > 0.$$

*Soluție.* Funcția din membrul stâng al inecuației are sens pentru  $\cos x \neq 0$ . Înmulțind ambii membri ai inegalității cu  $\cos^2 x$ , obținem inecuația:  $\sin^2 2x + \frac{3}{2} \sin 2x - 2 > 0$ .

Ultima inecuație este echivalentă cu următoarea:  $\sin 2x > \frac{\sqrt{41} - 3}{4}$ , de unde:  $x \in \left( k\pi + \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4}, k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \frac{\sqrt{41} - 3}{4} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

76. Să se rezolve inecuația:

$$\sin 3x \sin 4x > \sin x \sin 2x,$$

dacă  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ .

*Soluție.* Descompunând produsele de sinusuri în diferențe de cosinusuri, se obține inecuația echivalentă:  $\cos 3x > \cos 7x$  sau:  $\sin 5x \sin 2x > 0$ . Însă dacă  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{2} \right)$ , atunci  $\sin 2x > 0$  și, prin urmare, inecuația precedentă este echivalentă cu inecuația:  $\sin 5x > 0$ , de unde:  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{5} \right) \cup \left( 2\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{2} \right)$ .

77. Să se rezolve inecuația:

$$\frac{\sin^2 x - \frac{1}{4}}{\sqrt{3} - (\sin x + \cos x)} > 0.$$

*Soluție.* Numitorul expresiei din membrul stâng al inecuației este pozitiv fiindcă:  $\sin x + \cos x \leq |\sin x + \cos x| = \left| \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right| \leq \sqrt{2}$ .

De aceea, inecuația considerată este echivalentă cu următoarea:  $\sin^2 x > \frac{1}{4}$ ;  $|\sin x| > \frac{1}{2}$ ,

de unde:  $x \in \left( \frac{\pi}{6} + k\pi, 5\frac{\pi}{6} + k\pi \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

78. Să se rezolve inecuația:

$$\cos x - \sin x - \cos 2x > 0,$$

dacă  $0 < x < 2\pi$ .

*Soluție.* Scriem inecuația sub forma echivalentă:  $\cos x - \sin x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x) [1 - (\cos x + \sin x)] = 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) (\cos x - \sin x) > 0$ .

Însă  $x \in (0, 2\pi)$ , deci  $\sin \frac{x}{2} > 0$ . Prin urmare, inecuația precedentă este satisfăcută în următoarele cazuri: a)  $\begin{cases} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} > 0, \\ \cos x - \sin x > 0. \end{cases}$  Pentru prima inecuație obținem  $x \in \left( \frac{\pi}{2}, 2\pi \right)$ .

iar pentru a doua,  $x \in \left( 0, \frac{\pi}{4} \right) \cup \left( 5\frac{\pi}{4}, 2\pi \right)$ .

Prin urmare, în acest caz  $x \in \left( 5\frac{\pi}{4}, 2\pi \right)$ .

b)  $\begin{cases} \sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} < 0, \\ \cos x - \sin x < 0. \end{cases}$



Rezolvând fiecare inecuație a sistemului b) și intersectând mulțimile-soluții, obținem  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

În concluzie, inecuația dată admite soluțiile:  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(5\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$ .

79. Să se rezolve inecuația:

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}.$$

*Soluție.* Notînd  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$  și ținînd seama de formula  $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$ , inecuația devine:  $\frac{t^3 - 1}{t^2 - t - 1} > 0$  sau, ținînd seama că  $t^2 + t + 1 > 0$ ,  $\frac{t-1}{t^2 - t + 1} > 0$ . Rezolvînd ultima inecuație, obținem:  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$  sau  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ , de unde:  $x \in \left(k2\pi - 2 \arctg \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(k2\pi + 2 \arctg \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \pi + k2\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

80. Să se rezolve inecuația:  $\sin x > \sin 3x$ .

*Soluție.* Rezolvăm inecuația echivalentă:  $\sin 3x - \sin x < 0$  sau, transformînd primul membru în produs:  $\sin x \cos 2x > 0$ . Funcția din membrul stîng al inegalității precedente este periodică, cu perioada  $2\pi$ , deci este suficient să se determine soluțiile inecuației din intervalul  $[0, 2\pi]$ .

Pentru aceasta se determină rădăcinile ecuațiilor  $\sin x = 0$ ,  $\cos 2x = 0$  aparținînd intervalului  $[0, 2\pi]$  și se alcătuiește următorul tabel:

$x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	$\pi$	$5\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{2}$	$7\frac{\pi}{4}$	$2\pi$
$\sin x$	0	+	+	+	0	-	-	-	0
$\cos 2x$	+	0	-	-	0	+	+	0	+
$\sin x \cos 2x$	0	+	0	-	0	+	0	+	0

Prin urmare, în intervalul  $[0, 2\pi]$  inecuația dată este satisfăcută pentru:  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, 3\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi, 5\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(7\frac{\pi}{4}, 2\pi\right)$ , iar soluția sa generală este:  $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(\pi + k2\pi, 5\frac{\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(7\frac{\pi}{4} + k2\pi, 2\pi + k2\pi\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

81. Să se rezolve inecuația:

$$a^{\cos x} > a^{\sin x},$$

unde  $a > 0$  și  $a \neq 1$ .

*Soluție.* Pentru  $a \in (0, 1)$ , inecuația este echivalentă cu următoarea:  $\cos x < \sin x$ .

În intervalul  $[0, 2\pi]$ , inecuația precedentă este satisfăcută pentru  $x \in \left(\frac{\pi}{4}, 5\frac{\pi}{4}\right)$ . Prin urmare, inecuația dată are soluțiile:  $x \in \left(k2\pi + \frac{\pi}{4}, k2\pi + 5\frac{\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Pentru  $a \in (1, \infty)$ , inecuația este echivalentă cu următoarea:  $\cos x > \sin x$  și este satisfăcută pentru:  $x \in \left(k2\pi - 3\frac{\pi}{4}, k2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

82. Să se rezolve inecuația:  $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4(x+1)} > 1$ .

*Soluție.* Notînd  $\frac{\pi x}{4(x+1)} = u$ , inecuația devine:  $\operatorname{tg} u > 1$  și este satisfăcută pentru  $u \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sau, revenind la variabila  $x$ :  $\frac{\pi}{4} + k\pi < \frac{\pi x}{4(x+1)} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ .

Inegalitățile precedente sînt echivalente cu următoarele:  $1 + 4k < \frac{x}{x+1} < 2 + 4k$ ;  $4k < -\frac{1}{x+1} < 4k+1$ ;  $-\frac{1}{4k} < x+1 < -\frac{1}{4k+1}$  sau:  $-\frac{4k+1}{4k} < x < -\frac{4k+2}{4k+1}$  pentru  $k \neq 0$  și:  $x < -2$  pentru  $k = 0$ .

Prin urmare, inecuația dată are soluțiile:  $x \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{4k+1}{4k}, -\frac{4k+2}{4k+1}\right)$  unde  $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

83. Să se rezolve inecuația:  $\sin(4 \cos x) > 0$ . (1)

*Soluție.* Inecuația (1) este echivalentă cu sistemul:  $k2\pi < 4 \cos x < \pi + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) sau

$$k \frac{\pi}{2} < \cos x < \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Însă  $-1 \leq \cos x \leq 1$ , deci (2) are sens numai pentru  $k = 0, -1$  și se reduce la sistemul:

$$0 < \cos x < \frac{\pi}{4}. \quad (3)$$

$$\text{și la inecuația: } \cos x < -\frac{\pi}{4}. \quad (4)$$

În intervalul  $[0, 2\pi]$ , de lungime egală cu perioada funcției  $\cos$ , sistemul (3) este satisfăcut pentru:  $x \in \left(\arccos \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2}, 2\pi - \arccos \frac{\pi}{4}\right)$ , iar inecuația (4) pentru:  $x \in \left(\pi - \arccos \frac{\pi}{4}, \pi + \arccos \frac{\pi}{4}\right)$ . Prin urmare, inecuația dată admite soluțiile:  $x \in \left(k2\pi + \arccos \frac{\pi}{4}, k2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(k2\pi - \frac{\pi}{2}, k2\pi - \arccos \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(k2\pi + \pi - \arccos \frac{\pi}{4}, k2\pi + \pi + \arccos \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $k$  fiind un număr întreg arbitrar.

84. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x > 1, \\ \cos 3x > -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

*Soluție.* Funcțiile  $\operatorname{tg} x$  și  $\cos 3x$  au respectiv perioadele  $\pi$ ,  $\frac{2\pi}{3}$ . Prin urmare, perioada comună a acestor funcții este  $2\pi$ . De aici rezultă că este suficient să rezolvăm sistemul (1) în intervalul  $[0, 2\pi]$ . Inecuația  $\operatorname{tg} x > 1$ , admite soluțiile:

$$x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad (2)$$

iar inecuația  $\cos 3x > -\frac{1}{2}$  admite soluțiile:

$$x \in \left[0, \frac{2\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{8\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{10\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right) \cup \left(\frac{16\pi}{9}, 2\pi\right]. \quad (3)$$

Intersectînd mulțimile (2) și (3), obținem soluțiile sistemului (1), aparținînd intervalului  $[0, 2\pi]$ :

$$x \in \left(\frac{4\pi}{9}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right).$$

De aici se obțin soluțiile generale  $x \in \left(\frac{4\pi}{9} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

85. Să se rezolve inecuația:  $\arcsin x > \arccos x$ .

*Soluție.* Folosind identitatea  $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$ , inecuația devine:  $\arcsin x > \frac{\pi}{4}$ .

Pe de altă parte, funcția  $\arcsin$  este definită pentru  $x \in [-1, 1]$  și este strict crescătoare pe domeniul său de definiție.

De aici rezultă că ultima inecuație este echivalentă cu următoarele:

$$\sin \frac{\pi}{4} < x \leq \sin \frac{\pi}{2}, \text{ deci: } x \in \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right].$$

86. Să se rezolve inecuația:  $\operatorname{arctg}^3 x - 4 \operatorname{arctg} x + 3 > 0$ .

*Soluție.* Notînd  $\operatorname{arctg} x = t$  și ținînd seama că  $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ , inecuația este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} t^3 - 4t + 3 > 0, \\ -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{care este satisfăcut pentru } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 1\right). \quad \text{Însă}$$

funcția  $\operatorname{arctg}$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ . Prin urmare:  $x < \operatorname{tg} 1$ , adică  $x \in (-\infty, \operatorname{tg} 1)$ .

## Exerciții și probleme propuse

### Ecuatii trigonometrice

1. Se știe că în intervalul  $[0, 2\pi]$  ecuația:

$$\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$$

are numai două rădăcini:  $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = \pi$ . Să se găsească toate rădăcinile sale.

2. Numărul  $x_1$  este rădăcină a ecuației date. Fără să se facă calculele corespunzătoare, să se indice dacă  $x_2$  este rădăcină:

a)  $\sin 2x + 3 \sin x - 3 = 0$  ( $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $x_2 = 9\frac{\pi}{2}$ );

b)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$  ( $x_1 = \pi$ ,  $x_2 = 4\pi$ ).

3. Să se rezolve ecuația:  $\sin 3x = 2 \sin^3 x$ .

4. Să se rezolve ecuația:  $\sin 3x = 4 \sin x \cos 2x$ .

5. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$ ;

b)  $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$ .

6. Să se rezolve ecuația:  $2 \sin x + 2 \cos x = \frac{1}{\cos x}$ .

7. Să se rezolve ecuația:  $\operatorname{tg} 2x = 2 \cos x$ .

8. Să se rezolve ecuația:  $\operatorname{tg}(x - 30^\circ) + \operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(x + 30^\circ) = 0$ .

9. Să se găsească sinusul și cosinusul unghiului  $x$  care satisface ecuația:  $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x = 0$ .

10. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x$ ; b)  $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} = 2$ .

11. Să se determine arcul al cărui cosinus este egal cu coarda corespunzătoare.
12. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\cos x - \sin x + 2 = 2 \cos^2 x + \sin 2x$ ; b)  $\sin x + \cos x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$ ; c)  $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \cos 2x + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + \sin 2x - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right)$ .
13. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\sin x \operatorname{tg} x = 2$ ; b)  $2 \sin x \sin 3x = 1$ ; c)  $8 \sin^6 x + 3 \cos 2x + 2 \cos 4x + 1 = 0$ .
14. Să se rezolve ecuația:  $8 \cos^6 x - 8 \cos^4 x + 4 \cos^2 x - 1 = 0$ .
15. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 0$ ; b)  $2 - (7 + \sin 2x) \sin^2 x + (7 + \sin 2x) \sin^4 x = 0$ .
16. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\sin 8x + 4 \sin 4x \sin^2 2x + 8 \sin 2x \sin^2 x - 8 \cos^2 x = 0$ ; b)  $\sin^8 x - \cos^8 x - 2 \sin^2 x + 1 = 0$ .
17. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16} \cos^4 2x$ ; b)  $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 7$ .
18. Să se rezolve ecuația:  $\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1 + \sin x}{1 + \cos x}$ .
19. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x + \cos x$ ; b)  $\operatorname{tg} 4x - 3 \operatorname{tg} 2x = 0$ .
20. Să se rezolve ecuațiile: a)  $\cos x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ ; b)  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{8}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ .
21. Să se rezolve ecuațiile:
- a)  $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin 3x} = 2$ ; b)  $\sin x - \cos x + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \sec x - \operatorname{cosec} x = 0$ ;
- c)  $2 \operatorname{ctg} 2x - 3 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$ ; d)  $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$ ; e)  $\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$ ; f)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} x \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4 \cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$ .
22. Se consideră ecuația:  $\cos x + \sqrt{3} \sin x = a^2$ .  
Să se determine valoarea maximă a numărului  $a$  pentru care ecuația admite soluții și să se rezolve în acest caz.
23. Să se rezolve ecuația:  $\sin x \operatorname{tg} x + 2 \cos x = m$ .  
Se vor indica condițiile de posibilitate ale problemei.
24. Să se rezolve ecuația:  $\sin 2x = m \operatorname{tg} x$ .
25. Să se rezolve ecuația:  $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = m^2$ .
26. Să se rezolve ecuația:  $2 \sin^2 x + 3(m - 1) \cos x + m = 0$ .
27. Să se rezolve ecuația:

$$(2m^2 + m - 1) \cos 2x - 2(2m + 1) \cos x + 2m^2 + m + 1 = 0.$$

*Sisteme de ecuații trigonometrice*

28. Să se rezolve sistemul:  $2(\sin 2x + \sin 2y) = 2 \sin(x + y) = 1$ .
29. Să se rezolve sistemele:

$$a) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \operatorname{tg}(x + y) = \frac{4}{3} \end{cases} \quad b) \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

30. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = -2\sqrt{3}, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$$

31. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(y + \frac{\pi}{6}\right), \\ \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} 2y. \end{cases}$$

32. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{12}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3}. \end{cases}$$

33. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = b. \end{cases}$$

34. Să se determine unghiul  $\alpha$  astfel ca sistemul:

$$\begin{cases} x - y = \alpha, \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4 \cos^2(x - y) \end{cases}$$

să admită soluții. Să se găsească aceste soluții.

35. Să se exprime  $\cos \alpha$  și  $\sin \beta$  prin  $A$  și  $B$ , știind că:

$$\sin \alpha = A \sin \beta, \operatorname{tg} \alpha = B \operatorname{tg} \beta.$$

36. Să se găsească condițiile pe care trebuie să le satisfacă numerele  $a, b, c$  pentru ca sistemul:

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 2a, \\ \cos x + \cos y = 2b, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = c \end{cases}$$

să admită cel puțin o soluție.

37. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \sin x \sin y = a, \\ \cos x \cos y = b. \end{cases}$$

38. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \sin y = m \sin x, \\ 2 \cos x + \cos y = 1. \end{cases}$$

39. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin \alpha, \\ \cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha. \end{cases}$$

40. Să se elimine unghiul  $x$  din ecuațiile sistemului: 
$$\begin{cases} \sin x + \cos x = m, \\ \sin^3 x + \cos^3 x = n. \end{cases}$$

41. Să se elimine unghiul  $a$  din ecuațiile sistemului: 
$$\begin{cases} x \sin a + y \sin 2a = \sin 3a, \\ x \sin 3a + y \sin 6a = \sin 9a. \end{cases}$$

42. Din ecuațiile sistemului: 
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = a, \\ \cos x + \cos y = b, \\ \operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} \frac{y}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \end{cases}$$

să se găsească o relație independentă de  $x$  și  $y$ .

43. Să se rezolve sistemul: 
$$\begin{cases} \arcsin x = -\arccos y, \\ \cos [3\pi(x + y)] = 1. \end{cases}$$

*Inecuații trigonometrice*

44. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; b)  $\cos x \leq -\frac{1}{2}$ ; c)  $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} 2$ ; d)  $\operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}$ ; e)  $\frac{1}{|\cos x|} > 1$

45. Să se rezolve inecuația:  $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ .

46. Să se rezolve inecuația:  $|\operatorname{tg} x| > |\operatorname{ctg} x|$ .

47. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $\sin 2x > \sin 4x$ ; b)  $\operatorname{tg} \frac{x}{3} < \operatorname{tg} x$ .

48. Să se rezolve inecuația:  $\frac{\cos 2x + \cos x - 1}{\cos 2x} > 2$ .

49. Să se rezolve inecuația:  $\cos^3 x \cos 3x - \sin^3 x \sin 3x > \frac{5}{8}$ .

50. Să se rezolve inecuația:  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} > 1 + \operatorname{ctg} x$ .

51. Să se rezolve inecuația:  $\sin \varphi > 4\sqrt{3} \cos^3 \varphi$ .

52. Să se rezolve inecuația:  $\frac{\cos x}{\sin^2 x (\cos x - \sin x)} > 1$ .

53. Să se rezolve inecuația:  $\frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x - \cos x - \sqrt{2}} \leq 0$ .

54. Să se rezolve inecuațiile:

a)  $\arcsin x < 1$ ; b)  $\arccos x > 0$ ; c)  $\arccos x < -\frac{\pi}{3}$ ;

d)  $\operatorname{arctg} x < 2$ ; e)  $\operatorname{arcctg} x > \frac{\pi}{2}$ .

55. Să se rezolve inecuația:  $\arccos x > \arccos x^2$ .

56. Să se rezolve inecuația:  $\arcsin (x^2 + 1) < 2$ .

57. Să se rezolve inecuația:  $\arcsin^2 x - 3 \arcsin x + 2 > 0$ .

## Numere complexe sub forma trigonometrică

Numărul complex  $z = x + iy$  poate fi reprezentat într-un plan prin punctul  $M(x, y)$ . Dacă  $O$  este originea axelor de coordonate din plan, lungimea segmentului  $OM$  se numește modulul numărului  $z$  și se notează cu  $|z|$  sau cu  $\rho$ . Unghiul orientat dintre axa  $Ox$  și vectorul  $\overrightarrow{OM}$  se numește argumentul numărului complex  $z$  și se notează cu  $\arg z$  sau cu  $\varphi$ . Avem:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Numărul complex poate fi scris sub forma trigonometrică:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Numărul  $\bar{z} = x - iy$  se numește conjugatul numărului complex  $z$ .

Numerele  $z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$  și  $z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$  sînt egale dacă  $\rho_1 = \rho_2$  și  $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ , ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Produsul numerelor complexe  $z_h = \rho_h (\cos \varphi_h + i \sin \varphi_h)$ ,  $h = 1, \dots, n$  este:

$$z_1 z_2 \dots z_n = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_n [\cos (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)].$$

Cîtlul numerelor  $z_1$  și  $z_2 \neq 0$  este:  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$ .

Puterea numărului complex  $z$  este:  $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ .

În legătură cu puterea unui număr complex avem formula lui Moivre:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Rădăcina de ordinul  $n$  dintr-un număr complex  $z$  are  $n$  valori distincte date de formula:

$$\sqrt[n]{\rho (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho^{\frac{1}{n}} \left( \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} \right), \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Rădăcinile de ordinul  $n$  ale numărului 1 se numesc *rădăcinile de ordinul  $n$  ale unității* și sînt egale cu:  $\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

O ecuație de forma:  $z^n + \alpha = 0$ , unde  $\alpha$  este o constantă complexă, se numește *ecuație binomă*.

## Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a)  $\sqrt{3} + i$ ; b)  $-1 + i\sqrt{3}$ ; c)  $\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ; d)  $2 - \sqrt{3} + i$ .

*Soluție.* a) Avem  $\rho = \sqrt{3 + 1} = 2$ . Cu această valoare deducem:  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ , deci:  $\varphi = 30^\circ$ . Rezultă:  $z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ .

b) Avem  $\rho = \sqrt{1 + 3} = 2$ , deci:  $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , de unde:  $\varphi = 120^\circ$ , adică:  $z_2 = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$ . c) Avem  $\rho = \sqrt{2 - \sqrt{2} + 2 + \sqrt{2}} = 2$ . De aici rezultă:  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$ , deci:  $\varphi = 67^\circ 30'$ .

Rezultă că:  $z_3 = 2(\cos 67^\circ 30' + i \sin 67^\circ 30')$ . d) Avem:  $\rho = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$ .

Cu această valoare deducem:  $\cos \varphi = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,  $\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ , adică:  $\varphi = 75^\circ$ . Deci:  $z_4 = (\sqrt{6} - \sqrt{2})(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$ .

2. Să se scrie sub formă trigonometrică următoarele numere complexe:

a)  $\sin \alpha + \cos \alpha + i(\sin \alpha - \cos \alpha)$ ; b)  $1 + \operatorname{tg} \alpha + i(1 - \operatorname{tg} \alpha)$ ,  $\alpha \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ .

*Soluție.* a) Avem:  $\rho = \sqrt{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2} = \sqrt{2}$ .

De aici deducem:  $\cos \varphi = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{2\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ ,  $\sin \varphi = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sin \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sqrt{2}} = \frac{2\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4}}{\sqrt{2}} = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$ , adică:  $\varphi = \alpha - \frac{\pi}{4}$ . Rezultă:  $z_1 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right]$ .

b) Avem:  $\rho = \sqrt{(1 + \operatorname{tg} \alpha)^2 + (1 - \operatorname{tg} \alpha)^2} = \sqrt{2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)} = \frac{\sqrt{2}}{|\cos \alpha|}$ .



$$\begin{aligned} \text{Cu această valoare obținem: } \cos \varphi &= \frac{(1 + \operatorname{tg} \alpha) |\cos \alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right), \sin \varphi = \frac{(1 - \operatorname{tg} \alpha) |\cos \alpha|}{\sqrt{2}} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} = \\ &= \frac{|\cos \alpha|}{\cos \alpha} \cdot \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right). \end{aligned}$$

Dacă  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ , atunci  $|\cos \alpha| = \cos \alpha$  și deci:  $\varphi = \frac{\pi}{4} - \alpha$ . Dacă:  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , atunci  $|\cos \alpha| = -\cos \alpha$  și deci:  $\varphi = \frac{5\pi}{4} - \alpha$ .

Rezultă că:  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \right]$ , dacă:  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$  și:

$$z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\cos \alpha} \left[ \cos \left( \frac{5\pi}{4} - \alpha \right) + i \sin \left( \frac{5\pi}{4} - \alpha \right) \right], \text{ dacă: } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}.$$

**3. Să se demonstreze că dacă  $|z| < \frac{1}{2}$ , atunci:**

$$|(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}.$$

*Soluție.* Din inegalitatea:  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ , deducem:  $|(1+i)z^3 + iz| \leq |(1+i)z^3| + |iz|$ . Dar:  $|(1+i)z^3| = |1+i| \cdot |z^3| = \sqrt{2} |z^3|$  și  $|iz| = |i| \cdot |z| = |z|$ .

$$\begin{aligned} \text{Ținând seama că } |z| < \frac{1}{2}, \text{ rezultă că: } |(1+i)z^3| + |iz| &< \sqrt{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{\sqrt{2} + 4}{8} < \frac{2+4}{8} = \frac{3}{4}, \text{ deci: } |(1+i)z^3 + iz| < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

**4. Să se determine forma trigonometrică a numerelor complexe  $z$  care pot fi scrise sub forma:  $z = \frac{1-ai}{1+ai}$ , unde  $a$  este un număr real.**

*Soluție.* Din expresia numărului  $z$  rezultă că:  $z = \frac{1-a^2-2ai}{1+a^2}$ .

Dacă notăm  $a = \operatorname{tg} \varphi$ , ceea ce este totdeauna posibil oricare ar fi numărul real  $a$ , rezultă:

$$z = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi - 2i \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}.$$

Dar:  $\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \cos 2\varphi$ ,  $\frac{2 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \sin 2\varphi$ , adică:  $z = \cos 2\varphi - i \sin 2\varphi$ . De aici deducem:  $|z| = 1$ .

**5. Să se determine modulele și argumentele următoarelor numere complexe: a)  $z_1 = (1+i\sqrt{3})(1-i)(\sin \alpha - i \cos \alpha)$ , b)  $z_2 = \frac{(-\sqrt{3}+i)(1+i)(\cos \alpha - i \sin \alpha)}{(1-i\sqrt{3})(-1+i)(\sin \alpha + i \cos \alpha)}$ .**

*Soluție.* a) Avem:  $1+i\sqrt{3} = 2(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ ,  $1-i = \sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ ,  $\sin \alpha - i \cos \alpha = \cos(\alpha - 90^\circ) + i \sin(\alpha - 90^\circ)$ , deci:  $z_1 = 2\sqrt{2}[\cos(285^\circ + \alpha) + i \sin(285^\circ + \alpha)]$ , adică:  $\rho_1 = 2\sqrt{2}$ ,  $\varphi_1 = 285^\circ + \alpha$ .

b) Avem:  $-\sqrt{3}+i = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$ ,  $1+i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$ ,  $1-i\sqrt{3} = 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$ ,  $-1+i = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$ ,  $\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$ ,  $\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos(90^\circ - \alpha) + i \sin(90^\circ - \alpha)$ , de unde deducem:  $z_2 = \cos(-330^\circ) + i \sin(-330^\circ)$  sau:  $z_2 = \cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$ . Deci:  $\rho_2 = 1$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$ .

6. Să se determine modulele și argumentele următoarelor numere complexe:

$$z_1 = (1 - i)^{24}, \quad z_2 = \left(\frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}\right)^{16}, \quad z_3 = \left(1 + \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right)^{25}, \quad z_4 = \frac{(\sqrt{3} - i)^{16}}{(1 + i)^9} + \frac{(\sqrt{3} + i)^{16}}{(1 - i)^9}.$$

Soluție. Avem:

$$\begin{aligned} 1 - i &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right), & 1 + i &= \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \\ 1 - i\sqrt{3} &= 2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right), & \sqrt{3} + i &= 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \\ \sqrt{3} - i &= 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right), \\ 2 + \sqrt{3} + i &= (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Cu aceste valori deducem:  $z_1 = 2^{12}(\cos 42\pi + i \sin 42\pi) = 2^{12}$ ;  $z_2 =$

$$\begin{aligned} &= \left[ \frac{2 \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)}{\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)} \right]^{16} = \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right) \right]^{16} = 2^8 \left( \cos \frac{68\pi}{3} + i \sin \frac{68\pi}{3} \right) = \\ &= 2^8 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); \quad z_3 = \left[ \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) \right]^{25} = \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^{25} \left( \cos \frac{25\pi}{12} + i \sin \frac{25\pi}{12} \right) = \\ &= \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^{25} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right); \\ z_4 &= \frac{2^{16} \left( \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)}{2^4 \sqrt{2} \left( \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4} \right)} + \frac{2^{16} \left( \cos \frac{8\pi}{3} + i \sin \frac{8\pi}{3} \right)}{2^4 \sqrt{2} \left( \cos \frac{63\pi}{4} + i \sin \frac{63\pi}{4} \right)} = \\ &= 2^{11} \sqrt{2} \left[ \cos \frac{325\pi}{12} + i \sin \frac{325\pi}{12} + \cos \left( -\frac{157\pi}{12} \right) + i \sin \left( -\frac{157\pi}{12} \right) \right] = \\ &= 2^{11} \sqrt{2} \left[ \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{12} - i \sin \frac{\pi}{12} \right] = 2^{12} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

De aici rezultă:  $\rho_1 = 2^{12}$ ,  $\varphi_1 = 0$ ;  $\rho_2 = 2^8$ ,  $\varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$ ;  $\rho_3 = \left( \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)^{25}$ ,  $\varphi_3 = \frac{\pi}{12}$ ;

$$\rho_4 = 2^{12} \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{12}, \quad \varphi_4 = 0.$$

7. Să se calculeze expresia:  $(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n$ , ( $\alpha \neq 2k\pi$ ).

Soluție. Dacă notăm  $z = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha$ , avem:  $\rho = \sqrt{(1 - \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} =$   
 $= \sqrt{2 - 2 \cos \alpha} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|.$

$$\text{Cu această valoare deducem: } \cos \varphi = \frac{1 - \cos \alpha}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|,$$

$$\sin \varphi = \frac{\sin \alpha}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right|} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Dacă  $2k\pi < \frac{\alpha}{2} < (2k+1)\pi$ , atunci  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ , deci:  $\cos \varphi = \sin \frac{\alpha}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$ ,  
 $\sin \varphi = \cos \frac{\alpha}{2} = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$ , adică:  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ , și deci:  $z = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + \right.$   
 $\left. + i \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$ .

De aici rezultă că, dacă  $4k\pi < \alpha < 2(2k+1)\pi$ :  $(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n =$   
 $= 2^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \frac{n(\pi - \alpha)}{2} + i \sin \frac{n(\pi - \alpha)}{2} \right].$

Dacă  $(2k+1)\pi < \frac{\alpha}{2} < 2(k+1)\pi$ , atunci  $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$ , deci:  $\cos \varphi = -\sin \frac{\alpha}{2} =$   
 $= \sin \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$ ,  $\sin \varphi = -\cos \frac{\alpha}{2} = \cos \left( \pi + \frac{\alpha}{2} \right) =$   
 $= \sin \left( \frac{\pi}{2} - \pi - \frac{\alpha}{2} \right) = \sin \left( 2\pi - \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right)$ , adică:  $\varphi = \frac{3\pi - \alpha}{2}$ ,  
 de unde:  $z = -2 \sin \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{3\pi - \alpha}{2} + i \sin \frac{3\pi - \alpha}{2} \right).$

De aici deducem, dacă  $2(2k+1)\pi < \alpha < 4(k+1)\pi$ :  $(1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n =$   
 $= (-2)^n \sin^n \frac{\alpha}{2} \left[ \cos \frac{n(3\pi - \alpha)}{2} + i \sin \frac{n(3\pi - \alpha)}{2} \right].$

8. Știind că  $z + \frac{1}{z} = 2 \sin \alpha$ , să se calculeze suma  $z^m + \frac{1}{z^m}$ .

Soluție. Din relația  $z + \frac{1}{z} = 2 \sin \alpha$ , rezultă că:  $z^2 - 2z \sin \alpha + 1 = 0$ , adică:  
 $z = \sin \alpha \pm \sqrt{\sin^2 \alpha - 1} = \sin \alpha \pm i \cos \alpha$ , deci  $z$  este un număr complex al cărui modul este 1.  
 Dacă notăm:  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ ,

$$\text{avem: } \frac{1}{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi, \quad (1)$$

deci relația dată devine:  $\cos \varphi = \sin \alpha$  sau:  $\cos \varphi = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ , de unde:

$$\varphi = 2k\pi \pm \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right). \quad (2)$$

Ținând seama de (1), rezultă:  $z^m = \cos m\varphi + i \sin m\varphi$  și:  $\frac{1}{z^m} = \cos m\varphi - i \sin m\varphi$ .

Cu aceste valori obținem:  $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m\varphi$  sau, având în vedere relația (2):  $z^m +$

$$+ \frac{1}{z^m} = 2 \cos \left[ 2mk\pi \pm m \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right], \text{ adică: } z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Dacă  $m = 4n$ , avem:  $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \cos m\alpha$ ; dacă  $m = 4n + 1$ , avem:  $z^m + \frac{1}{z^m} = 2 \sin m\alpha$ ;

dacă  $m = 4n + 2$ , avem:  $z^m + \frac{1}{z^m} = -2 \cos m\alpha$ ; dacă  $m = 4n + 3$ , avem:

$$z^m + \frac{1}{z^m} = -2 \sin m\alpha.$$

9. Să se exprime funcțiile trigonometrice ale arcului  $7\varphi$  cu ajutorul aceluiași funcții ale arcului  $\varphi$ .

*Soluție.* Avem:  $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^7 = \cos^7 \varphi + C_7^1 i \cos^6 \varphi \sin \varphi + C_7^2 i^2 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi + C_7^3 i^3 \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi + C_7^4 i^4 \cos^3 \varphi \sin^4 \varphi + C_7^5 i^5 \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi + C_7^6 i^6 \cos \varphi \sin^6 \varphi + C_7^7 i^7 \sin^7 \varphi$ , sau ținând seama de formula lui Moivre, de valorile combinărilor și de expresiile diverselor puteri ale lui  $i$ :  $\cos 7\varphi + i \sin 7\varphi = \cos^7 \varphi - 21 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi + 35 \cos^3 \varphi \sin^4 \varphi - 7 \cos \varphi \sin^6 \varphi + i(7 \cos^6 \varphi \sin \varphi - 35 \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi + 21 \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi - \sin^7 \varphi)$ .

De aici rezultă:

$$\cos 7\varphi = \cos^7 \varphi - 21 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi + 35 \cos^3 \varphi \sin^4 \varphi - 7 \cos \varphi \sin^6 \varphi, \quad (1)$$

$$\sin 7\varphi = 7 \cos^6 \varphi \sin \varphi - 35 \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi + 21 \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi - \sin^7 \varphi. \quad (2)$$

Având în vedere formulele:

$\sin^3 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$ ,  $\sin^4 \varphi = 1 - 2 \cos^2 \varphi + \cos^4 \varphi$ ,  $\sin^6 \varphi = 1 - 3 \cos^2 \varphi + 3 \cos^4 \varphi - \cos^6 \varphi$ ,  $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ ,  $\cos^4 \varphi = 1 - 2 \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$ ,  $\cos^6 \varphi = 1 - 3 \sin^2 \varphi + 3 \sin^4 \varphi - \sin^6 \varphi$ , din (1) și (2) deducem:  $\cos 7\varphi = 64 \cos^7 \varphi - 112 \cos^5 \varphi + 56 \cos^3 \varphi - 7 \cos \varphi$ ,  $\sin 7\varphi = 7 \sin \varphi - 56 \sin^3 \varphi + 112 \sin^5 \varphi - 64 \sin^7 \varphi$ .

Din relațiile (1) și (2) obținem:  $\operatorname{tg} 7\varphi = \frac{7 \cos^6 \varphi \sin \varphi - 35 \cos^4 \varphi \sin^3 \varphi + 21 \cos^2 \varphi \sin^5 \varphi - \sin^7 \varphi}{\cos^7 \varphi - 21 \cos^5 \varphi \sin^2 \varphi + 35 \cos^3 \varphi \sin^4 \varphi - 7 \cos \varphi \sin^6 \varphi}$ ,

de unde, simplificând cu  $\cos^7 \varphi$ :  $\operatorname{tg} 7\varphi = \frac{7 \operatorname{tg} \varphi - 35 \operatorname{tg}^3 \varphi + 21 \operatorname{tg}^5 \varphi - \operatorname{tg}^7 \varphi}{1 - 21 \operatorname{tg}^2 \varphi + 35 \operatorname{tg}^4 \varphi - 7 \operatorname{tg}^6 \varphi}$ .

Analog obținem:  $\operatorname{ctg} 7\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^7 \varphi - 21 \operatorname{ctg}^5 \varphi + 35 \operatorname{ctg}^3 \varphi - 7 \operatorname{ctg} \varphi}{7 \operatorname{ctg}^6 \varphi - 35 \operatorname{ctg}^4 \varphi + 21 \operatorname{ctg}^2 \varphi - 1}$ .

10. Să se demonstreze formulele:

$$\cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k) \alpha + \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m,$$

$$\cos^{2m+1} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos (2m-2k+1) \alpha.$$

*Soluție.* Dacă notăm:  $z = \cos \alpha + i \sin \alpha$ , atunci:  $\frac{1}{z} = \cos \alpha - i \sin \alpha$ , și deci:  $\cos \alpha = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$ . (1)

De asemenea, din formula lui Moivre deducem:  $z^k = \cos k \alpha + i \sin k \alpha$  și de aici:

$$\frac{1}{z^k} = \cos k \alpha - i \sin k \alpha, \text{ de unde: } \cos k \alpha = \frac{1}{2} \left( z^k + \frac{1}{z^k} \right). \quad (2)$$

Din (1) rezultă:  $\cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \left( z + \frac{1}{z} \right)^{2m}$  sau, având în vedere formula binomului lui

$$\text{Newton: } \cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \left( z^{2m} + C_{2m}^1 z^{2m-2} + \dots + C_{2m}^{m-1} z^2 + C_{2m}^m + C_{2m}^{m+1} \frac{1}{z^2} + \dots + C_{2m}^{2m-1} \frac{1}{z^{2m-2}} + C_{2m}^{2m} \frac{1}{z^{2m}} \right).$$

$$\text{Ținând seama că } C_n^p = C_n^{n-p}, \text{ această formulă se scrie: } \cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \left[ \left( z^{2m} + \frac{1}{z^{2m}} \right) + C_{2m}^1 \left( z^{2m-2} + \frac{1}{z^{2m-2}} \right) + \dots + C_{2m}^{m-1} \left( z^2 + \frac{1}{z^2} \right) + C_{2m}^m \right].$$

Înlocuind aici formula (2), deducem:  $\cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} [2 \cos 2m\alpha + 2C_{2m}^1 \cos 2(m-1)\alpha + \dots + 2C_{2m}^{m-1} \cos 2\alpha + C_{2m}^m]$ , adică:  $\cos^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)\alpha + \frac{1}{2^{2m}} C_{2m}^m$ .

Ridicând relația (1) la puterea  $2m+1$ , obținem:  $\cos^{2m+1} \alpha = \frac{1}{2^{2m+1}} \left( z^{2m+1} + C_{2m+1}^1 z^{2m-1} + \dots + C_{2m+1}^m z + C_{2m+1}^{m+1} \frac{1}{z} + \dots + C_{2m+1}^{2m} \frac{1}{z^{2m-1}} + C_{2m+1}^{2m+1} \frac{1}{z^{2m+1}} \right)$ .

Ținând seama de formula (2), rezultă:  $\cos^{2m+1} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m C_{2m+1}^k \cos (2m-2k+1)\alpha$ .

### 11. Să se calculeze suma:

$$S = 1 + a \cos \varphi + a^2 \cos 2\varphi + \dots + a^k \cos k\varphi, \quad (a > 0).$$

*Soluție.* Se consideră suma:  $T = a \sin \varphi + a^2 \sin 2\varphi + \dots + a^k \sin k\varphi$ . Avem:  $S + iT = 1 + a(\cos \varphi + i \sin \varphi) + a^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + a^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$ .

Notînd  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$  și ținînd seama de formula lui Moivre, rezultă:  $S + iT = 1 + az + a^2 z^2 + \dots + a^k z^k$  sau, făcînd suma progresiei geometrice din membrul al doilea:  $S + iT = \frac{a^{k+1} z^{k+1} - 1}{az - 1}$ .

Dacă amplificăm fracția din membrul al doilea cu  $\frac{a}{z} - 1$ , obținem:  $S + iT =$

$$\begin{aligned} & \frac{a^{k+2} z^k - a^{k+1} z^{k+1} - \frac{a}{z} + 1}{a^2 - a \left( z + \frac{1}{z} \right) + 1} \text{ sau, ținînd seama de expresia lui } z: S + iT = \\ & = \frac{a^{k+2}(\cos k\varphi + i \sin k\varphi) - a^{k+1}[\cos (k+1)\varphi + i \sin (k+1)\varphi] - a(\cos \varphi - i \sin \varphi) + 1}{a^2 - 2a \cos \varphi + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{De aici rezultă: } S = \frac{a^{k+2} \cos k\varphi - a^{k+1} \cos (k+1)\varphi - a \cos \varphi + 1}{a^2 - 2a \cos \varphi + 1}.$$

### 12. Să se calculeze sumele:

$$A = \cos \varphi + C_n^1 \cos 2\varphi + \dots + C_n^n \cos (n+1)\varphi,$$

$$B = \sin \varphi + C_n^1 \sin 2\varphi + \dots + C_n^n \sin (n+1)\varphi.$$

*Soluție.* Dacă notăm  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , avem:  $A + iB = z + C_n^1 z^2 + \dots + C_n^n z^{n+1}$ , sau, ținînd seama de formula binomului lui Newton:  $A + iB = z(1+z)^n$ , adică:  $A + iB = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ . Dar  $1 + \cos \varphi = 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}$ ,  $\sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$ , deci:

$$(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \left( 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n \left( \cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \right).$$

$$\text{Rezultă că: } A + iB = \left( 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n \left( \cos \frac{n+2}{2} \varphi + i \sin \frac{n+2}{2} \varphi \right).$$

$$\begin{aligned} \text{Deci: } \cos \varphi + C_n^1 \cos 2\varphi + \dots + C_n^n \cos (n+1)\varphi &= \left( 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n \cos \frac{(n+2)\varphi}{2}, \quad \sin \varphi + \\ &+ C_n^1 \sin 2\varphi + \dots + C_n^n \sin (n+1)\varphi = \left( 2 \cos \frac{\varphi}{2} \right)^n \sin \frac{(n+2)\varphi}{2}. \end{aligned}$$

**13. Să se calculeze următorii radicali:**

a)  $\sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$ ; b)  $\sqrt[3]{-2 + 2i}$ ; c)  $\sqrt[5]{1 - i}$ ; d)  $\sqrt[6]{-i}$ .

*Soluție.* a) Avem:  $\sqrt[4]{3 - i} = 2 \left( \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} \right)$ . Notînd  $z = \sqrt[4]{\sqrt{3} - i}$ , avem:

$$z = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{11\pi}{6}}{4} \right), \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Cele patru valori ale radicalului sînt deci:  $z_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{24} + i \sin \frac{11\pi}{24} \right)$ ,

$$z_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{24} + i \sin \frac{23\pi}{24} \right), \quad z_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{35\pi}{24} + i \sin \frac{35\pi}{24} \right), \quad z_4 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{47\pi}{24} + i \sin \frac{47\pi}{24} \right).$$

b) Dacă notăm  $z = \sqrt[3]{-2 + 2i}$ , avem:

$$z = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right),$$

$$\text{adică: } z = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{3\pi}{4}}{3} \right), \quad (k = 0, 1, 2).$$

$$\text{Deci: } z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right), \quad z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

c) Avem:  $1 - i = \sqrt{2} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$ .

$$\text{Dacă notăm } z = \sqrt[5]{1 - i}, \text{ rezultă: } z = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{360^\circ k + 315^\circ}{5} + i \sin \frac{360^\circ k + 315^\circ}{5} \right),$$

$$(k = 0, 1, \dots, 4), \text{ de unde: } z_1 = \sqrt[5]{2} (\cos 63^\circ + i \sin 63^\circ); \quad z_2 = \sqrt[5]{2} (\cos 185^\circ + i \sin 185^\circ); \quad z_3 = \sqrt[5]{2} (\cos 207^\circ + i \sin 207^\circ); \quad z_4 = \sqrt[5]{2} (\cos 279^\circ + i \sin 279^\circ); \quad z_5 = \sqrt[5]{2} (\cos 351^\circ + i \sin 351^\circ).$$

d) Notînd  $z = \sqrt[6]{-i}$ , avem:

$$z = \sqrt[6]{\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ},$$

$$\text{adică: } z = \cos \frac{360^\circ k + 270^\circ}{6} + i \sin \frac{360^\circ k + 270^\circ}{6}$$

$$\text{sau: } z = \cos (60^\circ k + 45^\circ) + i \sin (60^\circ k + 45^\circ), \quad (k = 0, 1, \dots, 5).$$

**14. Dacă notăm cu  $\varepsilon_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) rădăcinile de ordinul  $n$  ale unității, să se arate că:**

$$(a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \dots (a + b\varepsilon_{n-1}) = a^n + (-1)^{n+1}b^n.$$

*Soluție:* Ținînd seama că  $\varepsilon_k$ , ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) sînt rădăcinile de ordinul  $n$  ale unității, rezultă că ele sînt rădăcinile ecuației:

$$z^n - 1 = 0.$$

$$\text{Cu aceasta avem: } z^n - 1 = (z - \varepsilon_0)(z - \varepsilon_1) \dots (z - \varepsilon_{n-1}).$$

Dacă înlocuim în această identitate pe  $z$  cu  $-\frac{a}{b}$ , obținem:

$$(-1)^n \frac{a^n}{b^n} - 1 = (-1)^n \left( \frac{a}{b} + \varepsilon_0 \right) \left( \frac{a}{b} + \varepsilon_1 \right) \dots \left( \frac{a}{b} + \varepsilon_{n-1} \right)$$

$$\text{sau: } (-1)^n (a + b\varepsilon_0)(a + b\varepsilon_1) \dots (a + b\varepsilon_{n-1}) = (-1)^n - a^n - b^n.$$

Înmulțind ambii membri ai acestei relații cu  $(-1)^n$ , se obține relația cerută.

**15. Să se rezolve următoarele ecuații binome:**

a)  $(2 + i)z^3 - 3 + i = 0$ ; b)  $(3 - i)z^4 - 4i = 0$ ; c)  $5(1 - 3i)z^5 + 4(2 - i) = 0$ .

*Soluție.* a) Ecuația dată se mai poate scrie:  $z^3 = \frac{3-i}{2+i}$  sau:  $z^3 = 1 - i$ .

Rădăcinile ecuației sînt:  $z = \sqrt[3]{1-i}$ .

Avînd în vedere că  $1 - i = \sqrt{2} \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}$ , rezultă că:

$$z = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{7\pi}{4}}{3} \right), (k = 0, 1, 2).$$

Deci cele trei rădăcini căutate sînt:  $z_1 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$ ,  $z_2 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$ ,  $z_3 = \sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{23\pi}{12} + i \sin \frac{23\pi}{12} \right)$  sau:  $z_1 = \left[ \frac{\sqrt[3]{2}}{4} [\sqrt{2} - \sqrt{6} + i(\sqrt{2} + \sqrt{6})] \right]$ ;  $z_2 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2}(1+i)$ ;  $z_3 = \frac{\sqrt[3]{2}}{4} [\sqrt{6} + \sqrt{2} - i(\sqrt{6} - \sqrt{2})]$ . b) Scriind ecuația dată sub forma:

$z^4 = -1 + i\sqrt{3}$ , rezultă:  $z = \sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}$ , sau, ținînd seama că  $-1 + i\sqrt{3} =$

$$= 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right); z = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{2\pi}{3}}{4} \right), (k = 0, 1, 2, 3).$$

Cele patru rădăcini sînt deci:  $z_1 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$ ;  $z_2 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$ ;  $z_3 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right)$ ;  $z_4 = \sqrt[4]{2} \left( \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)$  sau:  $z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ ;  $z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(-1 + i\sqrt{3})$ ;  $z_3 = -\frac{\sqrt[4]{2}}{2}(\sqrt{3} + i)$ ;  $z_4 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}(1 - i\sqrt{3})$ . c) Ecuația dată se scrie:  $z^5 =$

$$= -1 - i, \text{ de unde: } z = \sqrt[5]{-1-i} \text{ sau: } z = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{5} \right)$$

( $k = 0, 1, 2, 3, 4$ ).

$$\text{Deci: } z_1 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right); z_2 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{13\pi}{20} + i \sin \frac{13\pi}{20} \right);$$

$$z_3 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{21\pi}{20} + i \sin \frac{21\pi}{20} \right); z_4 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{29\pi}{20} + i \sin \frac{29\pi}{20} \right);$$

$$z_5 = \sqrt[5]{2} \left( \cos \frac{37\pi}{20} + i \sin \frac{37\pi}{20} \right).$$

**16. Să se rezolve ecuația:**  $\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = \alpha$ , unde  $\alpha$  este un număr complex al cărui modul este egal cu 1.

*Soluție.* Notînd cu  $\varphi$  argumentul numărului  $\alpha$ , rezultă că ecuația dată se scrie:

$$\left( \frac{1+iz}{1-iz} \right)^n = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Folosind proprietăți ale proporțiilor, această ecuație se mai poate scrie:

$$iz = \frac{\cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} - 1}{\cos \frac{2k\pi + \varphi}{n} + i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n} + 1}.$$

Amplificind fracția din membrul al doilea cu conjugatul numitorului, rezultă:  $iz =$

$$= \frac{i \sin \frac{2k\pi + \varphi}{n}}{1 + \cos \frac{2k\pi + \varphi}{n}} \text{ sau, avînd în vedere formula } \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad z = \operatorname{tg} \frac{k\pi + \frac{\varphi}{2}}{n},$$

( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

De aici rezultă că toate rădăcinile acestei ecuații sînt reale.

**17. Să se rezolve ecuația:**  $z^n - C_n^1 a z^{n-1} - C_n^2 a^2 z^{n-2} - \dots - C_n^n a^n = 0$ , *a fiind o constantă complexă nenulă.*

*Soluție.* Ecuația dată se mai poate scrie:  $2z^n - (z^n + C_n^1 a z^{n-1} + \dots + C_n^n a^n) = 0$  sau, ținînd seama de formula binomului lui Newton:  $2z^n - (z+a)^n = 0$ .

De aici deducem:  $\left(\frac{z+a}{z}\right)^n = 2$ , adică:  $\frac{z+a}{z} = \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$ ,  
( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ).

$$\begin{aligned} \text{Din această ecuație rezultă: } z &= \frac{a}{\sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) - 1} \\ \text{sau: } z &= \frac{a \left[ \sqrt[n]{2} \left( \cos \frac{2k\pi}{n} - i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) - 1 \right]}{\sqrt[n]{4} + 1 - 2\sqrt[n]{2} \cos \frac{2k\pi}{n}}, \quad (k = 0, 1, \dots, n-1). \end{aligned}$$

**18. Să se rezolve ecuațiile:** a)  $z^3 - 9z^2 + 8 = 0$ ; b)  $z^3 + (1-i)z^2 - i = 0$ .

*Soluție.* a) Dacă notăm  $z^3 = w$ , obținem ecuația:  $w^2 - 9w + 8 = 0$ , ale cărei rădăcini sînt:  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 8$ .

Deci, ecuația dată se descompune în două ecuații binome:  $z^3 - 1 = 0$ ,  $z^3 - 8 = 0$ , ale căror rădăcini sînt:  $z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$ , ( $k = 0, 1, 2$ ), respectiv:  $z = 2 \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right)$ ,  
( $k = 0, 1, 2$ ).

Rezultă că ecuația dată are rădăcinile:  $z_1 = 1$ ;  $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ ;  $z_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $z_4 = 2$ ;  $z_5 = -1 + i\sqrt{3}$ ;  $z_6 = -1 - i\sqrt{3}$ . b) Notînd  $z^4 = t$ , obținem:  $t^2 + (1-i)t - i = 0$ ,  
ale cărei rădăcini sînt:  $t = \frac{i-1 \pm \sqrt{2}i}{2}$ .

Dar:  $\sqrt{2}i = 1 + i$ , deci:  $t_1 = -1$ ,  $t_2 = i$ .

Ecuația dată se descompune deci în ecuațiile:  $z^4 + 1 = 0$ ,  $z^4 - i = 0$ .

Prima ecuație se mai poate scrie:  $z^4 = \cos \pi + i \sin \pi$ , de unde:  $z = \cos \frac{(2k+1)\pi}{4} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{4}$ , ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).



A doua ecuație se scrie:  $z^4 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ . De aici rezultă:  $z = \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4}$ , ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

Rădăcinile ecuației date sînt deci:  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i)$ ;  $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 + i)$ ;  $z_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1 - i)$ ;  $z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - i)$ ;  $z_5 = \frac{1}{2} (\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}})$ ;  $z_6 = \frac{1}{2} (-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i \sqrt{2 - \sqrt{2}})$ ;  $z_7 = \frac{1}{2} (-\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i \sqrt{2 - \sqrt{2}})$ ;  $z_8 = \frac{1}{2} (\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i \sqrt{2 + \sqrt{2}})$ .

## Exerciții și probleme propuse

1. Să se scrie sub forma trigonometrică următoarele numere complexe:

a)  $2(1 - i)$ ; b)  $-\sqrt{3} + i$ ; c)  $(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ ; d)  $1 + i(2 + \sqrt{3})$ .

2. Să se scrie sub formă trigonometrică numerele complexe:

a)  $1 - \sin \alpha + i(1 + \sin \alpha)$ ; b)  $1 + \cos \alpha + i(1 - \cos \alpha)$ ; c)  $\sin \alpha + i(1 + \cos \alpha)$ .

3. Să se efectueze următoarele operații, punînd numerele complexe sub forma trigonometrică:

a)  $1 + i\sqrt{3}(\sqrt{3} - i) [1 + \sin \alpha + i(1 - \sin \alpha)]$ ;

b)  $\frac{(1 - i)(1 - i\sqrt{3})(1 - i(2 - \sqrt{3}))}{(1 + i)(\sqrt{3} + i)[(2 - \sqrt{3}) + i]}$ .

4. Să se determine modulele și argumentele următoarelor numere complexe:

$z_1 = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})^{12}$ ;  $z_2 = [1 - \cos \alpha - i(1 + \cos \alpha)]^{10}$ ;

$z_3 = \left(\frac{\sqrt{3} - i}{1 - i\sqrt{3}}\right)^{20}$ ;  $z_4 = \left[\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha + i(1 - \operatorname{tg} \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha + i(1 + \operatorname{tg} \alpha)}\right]^n$ ;

$z_5 = \left[\frac{\sin \alpha - i(1 + \cos \alpha)}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}\right]^n + \left[\frac{\sin \alpha + i(1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha + i \sin \alpha}\right]^n$ .

5. Știind că  $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$ , să se calculeze expresia:  $z^n + \frac{1}{z^n}$ .

6. Să se calculeze funcțiile trigonometrice ale arcului  $6x$  în funcție de funcțiile trigonometrice ale arcului  $x$ .

7. Să se calculeze radicalii:

a)  $\sqrt[5]{-1 - i}$ ; b)  $\sqrt[3]{\sqrt{3} + i}$ ; c)  $\sqrt[4]{i}$ ; d)  $\sqrt[3]{1 - i\sqrt{3}}$ .

8. Să se demonstreze formulele:

a)  $\sin^{2m} \alpha = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k} C_{2m}^k \cos 2(m - k) \alpha + \frac{C_{2m}^m}{2^m}$ ;

b)  $\sin^{2m+1} \alpha = \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=0}^m (-1)^{m+k} C_{2m+1}^k \sin (2m - 2k + 1) \alpha$ .

9. Să se calculeze suma:

$$\cos \alpha - \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha + 2\beta) - \dots + (-1)^{n-1} \cos [\alpha + (n-1) \beta].$$

10. Să se calculeze suma:  $\cos \alpha - C_n^1 \cos 2\alpha + C_n^2 \cos 3\alpha - \dots + (-1)^n C_n^n \cos (n+1) \alpha$ .

11. Dacă notăm cu  $\epsilon_k$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) rădăcinile de ordinul  $n$  ale unității, să se arate că:  $(\epsilon_0^2 - 2\epsilon_0 \cos \varphi + 1)(\epsilon_1^2 - 2\epsilon_1 \cos \varphi + 1) \dots (\epsilon_{n-1}^2 - 2\epsilon_{n-1} \cos \varphi + 1) = 2(1 - \cos n \varphi)$ .

12. Să se rezolve ecuațiile binome:

✂ a)  $(2-i)z^3 - 1 - 2i = 0$ ; b)  $(\sqrt{3} + i)z^4 + 4i = 0$ ; c)  $(1 + i\sqrt{3})x^4 - 2(\sqrt{3} + i) = 0$ .

13. Să se rezolve ecuațiile: a)  $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$ ; b)  $(z-i)^n - (z+i)^n = 0$ .

14. Să se arate că, dacă numerele  $m$  și  $n$  sînt prime între ele, ecuațiile  $z^m - 1 = 0$  și  $z^n - 1 = 0$  au o singură rădăcină comună.

✂ 15. Să se rezolve ecuațiile: a)  $z^6 - 9iz^3 - 8 = 0$ ; b)  $z^8 - 97z^4 + 1296 = 0$ .

16. Să se determine valorile sumelor:  $S_1 = 1 - C_n^2 + C_n^4 - \dots$   
 $S_2 = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots$

*Indicație.* Se calculează în două moduri puterea a  $n$ -a a numărului  $1+i$ .

17. Să se arate că:  $\sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 0$ ,  $\sum_{k=0}^{n-1} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$ .

*Indicație.* Se face suma rădăcinilor ecuației  $z^n - 1 = 0$ .

18. Să se afle poziția celui de-al treilea vîrf al triunghiului echilateral ale cărui vîrfuri sînt:  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 2 + i$ .

## Aplicațiile trigonometriei în geometrie

În acest capitol vom nota laturile unui triunghi  $ABC$  cu  $a, b, c$ , aria cu  $S$ , raza cercului circumscris cu  $R$ , raza cercului înscris cu  $r$ , semiperimetrul cu  $p$ . Dacă triunghiul este dreptunghic, notăm unghiul drept cu  $A$ .

Într-un triunghi dreptunghic avem următoarele relații:

$$\sin B = \cos C = \frac{b}{a}, \quad \sin C = \cos B = \frac{c}{a}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} C = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} C = \operatorname{ctg} B = \frac{c}{b}, \quad (2)$$

$$a^2 = b^2 + c^2. \quad (3)$$

Într-un triunghi oarecare avem următoarele relații:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (\text{teorema sinusurilor}); \quad (4)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{teorema cosinusurilor}); \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \quad (\text{teorema tangentelor}); \quad (6)$$

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}, \quad \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \quad (7)$$

$$S = \frac{bc \sin A}{2}; \quad (8)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (\text{formula lui Heron}); \quad (9)$$

$$r = \frac{S}{p}; \quad (10) \quad R = \frac{abc}{4S}. \quad (11)$$

Cazurile principale de rezolvare a triunghiurilor dreptunghice sînt:

- 1° se dau ipotenuza și un unghi ascuțit;
- 2° se dau o catetă și un unghi ascuțit;
- 3° se dau ipotenuza și o catetă;
- 4° se dau cele două catete.

Cazurile principale de rezolvare a triunghiurilor oarecare sînt:

- 1° se dau două unghiuri și o latură;
- 2° se dau două laturi și unghiul cuprins între ele;
- 3° se dau două laturi și unghiul opus uneia dintre ele;
- 4° se dau cele trei laturi.

### Exerciții și probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile:

$$1^\circ b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C; \quad 2^\circ (1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{2p^2}{a^2}; \quad 3^\circ \cos(2C - B) = \frac{c}{a^3}(3a^2 - 4c^2).$$

*Soluție.* Pentru a demonstra relațiile date vom folosi formulele:

$$\sin B = \frac{b}{a}, \sin C = \frac{c}{a}, \cos B = \frac{c}{a}, \cos C = \frac{b}{a}.$$

$$\text{În cazul } 1^\circ, \text{ avem: } b \cos B + c \cos C = \frac{bc}{a} + \frac{bc}{a} = \frac{2bc}{a}, \quad 2a \sin B \sin C = 2a \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{2bc}{a}.$$

$$\text{În cazul } 2^\circ, \text{ avem: } (1 + \cos B)(1 + \cos C) = \left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{b}{a}\right) = \frac{(a+c)(a+b)}{a^2} = \\ = \frac{a^2 + a(b+c) + bc}{a^2} = \frac{2a^2 + 2a(b+c) + 2bc}{2a^2}.$$

$$\text{Dar } a^2 = b^2 + c^2, \text{ deci: } (1 + \cos B)(1 + \cos C) = \frac{a^2 + 2a(b+c) + b^2 + 2bc + c^2}{2a^2} = \\ = \frac{(a+b+c)^2}{2a^3} = \frac{4p^2}{2a^2} = \frac{2p^2}{a^2}.$$

$$\text{În cazul } 3^\circ, \text{ avem: } \cos(2C - B) = \cos 2C \cos B + \sin 2C \sin B = \cos B(\cos^2 C - \sin^2 C) + \\ + 2 \sin B \sin C \cos C = \frac{c}{a} \left( \frac{b^2}{a^2} - \frac{c^2}{a^2} \right) + 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{c(3b^2 - c^2)}{a^3}. \quad \text{Dar } b^2 = a^2 - c^2, \text{ deci:} \\ \cos(2C - B) = \frac{c(3a^2 - 4c^2)}{a^3}.$$

$$2. \text{ Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile: } 1^\circ \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \\ + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{2(b^3 + c^3)}{(a+b)(b+c)(c+a)}; \quad 2^\circ \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = 1.$$

*Soluție.* (1°) Avînd în vedere că într-un triunghi dreptunghic avem  $\cos B = \frac{c}{a}$ ,  $\cos C = \frac{b}{a}$ , rezultă:

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos B}{1 + \cos B}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{c}{a}}{1 + \frac{c}{a}}} = \sqrt{\frac{a-c}{a+c}},$$

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}},$$

$$\text{deci: } \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} = \frac{a-c}{a+c} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{2(a^2 - bc)}{(a+b)(a+c)} = \frac{2(a^2 - bc)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$$\text{Dar } a^2 = b^2 + c^2, \text{ deci: } (a^2 - bc)(b+c) = (b^2 + c^2 - bc)(b+c) = b^3 + c^3.$$

$$2^\circ \text{ Avem: } \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{90^\circ}{2}}{\cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}},$$

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\sin \frac{90^\circ}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

$$\text{deci: } \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2}} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2}} = \frac{2 \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sqrt{2}} - \frac{2 \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left( \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = \sqrt{2} \cos \left( \frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) = \sqrt{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{2} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1.$$

3. Să se demonstreze că într-un triunghi dreptunghic avem relațiile:

$$1^\circ \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2} - \frac{r}{a}; \quad 2^\circ \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{r}{p}.$$

$$\text{Soluție. } 1^\circ \text{ Avem: } \sin^2 \frac{B}{2} = \frac{1 - \cos B}{2} = \frac{1 - \frac{c}{a}}{2} = \frac{a-c}{2a}, \quad \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{1 - \cos C}{2} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{2} = \frac{a-b}{2a},$$

$$\text{deci: } \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} = \frac{a-c}{2a} + \frac{a-b}{2a} = \frac{2a-b-c}{2a}. \quad \text{Dar: } r = \frac{S}{p} =$$

$$= \frac{\frac{bc}{2}}{a+b+c} = \frac{bc}{a+b+c}, \text{ de unde deducem că: } \frac{1}{2} - \frac{r}{a} = \frac{a-2r}{2a} = \frac{a - \frac{2bc}{a+b+c}}{2a} =$$

$$= \frac{a^2 + a(b+c) - 2bc}{2a(a+b+c)} = \frac{a^2 - (b^2 + c^2) + a(b+c) - 2bc}{2a(a+b+c)} = \frac{2a^2 + a(b+c) - (b+c)^2}{2a(a+b+c)} =$$

$$= \frac{a^2 + a(b+c) + a^2 - (b+c)^2}{2a(a+b+c)} = \frac{a(a+b+c) + (a+b+c)(a-b-c)}{2a(a+b+c)} = \frac{2a-b-c}{2a}.$$

$$2^\circ \text{ Avem: } \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{\sin B}{1 + \cos B} = \frac{b}{a+c}, \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sin C}{1 + \cos C} = \frac{c}{a+b}, \text{ deci: } \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} =$$

$$= \frac{bc}{(a+b)(a+c)} = \frac{2bc}{2a^2 + 2a(b+c) + 2bc} = \frac{2bc}{a^2 + 2a(b+c) + b^2 + 2bc + c^2} = \frac{2bc}{(a+b+c)^2} =$$

$$= \frac{4S}{4p^2} = \frac{r}{p}.$$

4. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care:  $b = 32$ ,  $\frac{B}{C} = \frac{7}{5}$ .

*Soluție.* Ținând seama că  $C = 90^\circ - B$ , relația dată se scrie:  $\frac{B}{90^\circ - B} = \frac{7}{5}$ , de unde:

$$B = 52^\circ 30' \text{ și } C = 37^\circ 30'. \text{ Din formulele: } a = \frac{b}{\sin B}, c = b \operatorname{ctg} B, \text{ deducem: } a = 40,33, \\ c = 24,55.$$

5. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care:  $c = 120$ ,  $\frac{b}{a} = \frac{3}{5}$ .

*Soluție.* Din formula  $\sin B = \frac{b}{a}$ , rezultă:  $\lg \sin B = \lg 0,6$ , adică:  $\lg \sin B = \bar{1},77815$ .

De aici deducem:  $B = 36^\circ 52' 11''$  și deci:  $C = 53^\circ 7' 49''$ . Din  $b = c \operatorname{tg} B$ , rezultă:  $\lg b = \lg 120 + \lg \operatorname{tg} 36^\circ 52' 11''$ . Dar:  $\lg 120 = 2,07918$ ;  $\lg \operatorname{tg} 36^\circ 52' 11'' = 1,87506$ , deci:  $\lg b = 1,95424$ , de unde:  $b = 90$ . Din  $a = \frac{5b}{3}$  deducem:  $a = 150$ .

6. Să se rezolve un triunghi dreptunghic cunoscând perimetrul  $2p$  și unghiul ascuțit  $B$ . Aplicație:  $p = 30$ ,  $B = 17^\circ$ .

*Soluție.* Avem  $C = 90^\circ - B$ .

Având în vedere că  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ , rezultă:  $a(1 + \sin B + \cos B) = 2p$ , de unde:

$$a = \frac{2p}{1 + \sin B + \cos B}.$$

Cu această valoare determinăm pe  $b$  și  $c$ .

Pentru a putea face calculele cu ajutorul logaritmilor, să transformăm în produs expresia  $1 + \sin B + \cos B$ .

$$\text{Avem: } 1 + \cos B = 2 \cos^2 \frac{B}{2}, \sin B = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}, \text{ deci: } 1 + \sin B + \cos B = \\ = 2 \cos \frac{B}{2} \left( \sin \frac{B}{2} + \cos \frac{B}{2} \right) = 2 \cos \frac{B}{2} \left[ \sin \frac{B}{2} + \sin \left( 90^\circ - \frac{B}{2} \right) \right] = \\ = 4 \cos \frac{B}{2} \sin 45^\circ \cos \left( 45^\circ - \frac{B}{2} \right) = 2\sqrt{2} \cos \frac{B}{2} \cos \left( 45^\circ - \frac{B}{2} \right).$$

$$\text{Rezultă că: } a = \frac{p}{\sqrt{2} \cos \frac{B}{2} \cos \left( 45^\circ - \frac{B}{2} \right)}. \text{ În cazul numeric dat avem: } a =$$

$$= \frac{30}{\sqrt{2} \cos 8^\circ 30' \cos 36^\circ 30'}, \text{ deci: } \lg a = \lg 30 + \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} \cos 8^\circ 30' + \operatorname{colg} \cos 36^\circ 30'.$$

$$\text{Dar: } \lg 30 = 1,47712, \frac{1}{2} \lg 2 = \frac{1}{2} \cdot 0,30103 = 0,15051, \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 = 1,84949, \lg \cos 8^\circ 30' = \\ = \bar{1},99520, \operatorname{colg} \cos 8^\circ 30' = 0,00480. \lg \cos 36^\circ 30' = \bar{1},90518, \operatorname{colg} \cos 36^\circ 30' = 0,094482, \text{ deci: } \\ \lg a = 1,42623, \text{ de unde: } a = 26,68.$$

Din  $b = a \sin B$  deducem:  $\lg b = \lg a + \lg \sin B$ , sau, având în vedere că:  $\lg \sin 17^\circ = \bar{1},46594$ , obținem:  $\lg b = 0,89217$ , adică:  $b = 7,80$ .

Ținând seama că  $a + b + c = 60$ , rezultă:  $c = 25,52$ .

7. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care sînt cunoscute ipotenuza  $a$  și suma  $m$  a catetelor. Discuție. Să se facă efectiv calculele în cazul:  $a = 13,56$ ,  $m = 16,48$ .

*Soluție.* Având în vedere că  $b = a \sin B$  și  $c = a \cos B$ , deducem:  $a \sin B + a \cos B = m$ ,

$$\text{adică: } \sin B + \cos B = \frac{m}{a}.$$

Dar  $\cos B = \sin(90^\circ - B)$ , deci:  $\sin B = \sin(90^\circ - B) = 2 \sin 45^\circ \cos(B - 45^\circ) = \frac{m}{a}$ ,

$$\text{de unde rezultă: } \cos(B - 45^\circ) = \frac{m}{a\sqrt{2}}.$$

Ținând seama că  $0^\circ < B < 90^\circ$ , rezultă:  $-45^\circ < B - 45^\circ < 45^\circ$  și deci trebuie să avem:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(B - 45^\circ) \leq 1, \text{ adică: } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{a\sqrt{2}} \leq 1.$$

De aici deducem:

$$a < m \leq a\sqrt{2},$$

care este condiția de posibilitate a problemei.

(2)

Presupunind această condiție satisfăcută, din ecuația (1) rezultă:  $B - 45^\circ = \pm \alpha$ ,

$$\left( \cos \alpha = \frac{m}{a\sqrt{2}} \right), \text{ adică: } B = 45^\circ + \alpha, C = 45^\circ - \alpha.$$

Valorile lui  $b$  și  $c$  rezultă din formulele  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ .

În cazul numeric dat, condiția (2) este satisfăcută. Avem:

$$\cos(B - 45^\circ) = \frac{16,48}{13,56\sqrt{2}},$$

$$\begin{aligned} \text{de unde: } \lg \cos(B - 45^\circ) &= \lg 16,48 + \operatorname{colg} 13,56 + \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 = 1,21696 + \bar{2},86774 + \bar{1},84949 = \\ &= \bar{1},93419. \end{aligned}$$

De aici deducem:  $B - 45^\circ = 30^\circ 45'$ , adică:  $B = 75^\circ 45'$  și deci:  $C = 14^\circ 15'$ .

Cu aceste valori găsim:  $b = 13,14$ ,  $c = 3,34$ .

**8. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care se dă înălțimea  $h$  corespunzătoare ipotenuzei și unghiul ascuțit  $B$ . Aplicație:  $h = 10,56$ ,  $B = 34^\circ 26'$ .**

*Soluție.* Avem  $C = 90^\circ - B$ .

Dacă notăm cu  $H$  proiecția vârfului  $A$  pe ipotenuza  $BC$ , atunci din triunghiul dreptunghic

$$AHB \text{ deducem: } c = \frac{h}{\sin B}. \text{ Cu această valoare avem: } a = \frac{c}{\cos B} = \frac{h}{\sin B \cos B} = \frac{2h}{\sin 2B}.$$

$$\text{Din triunghiul dreptunghic } AHC \text{ găsim: } b = \frac{h}{\cos B}. \text{ În cazul numeric dat avem: } \lg b =$$

$$= \lg 10,56 + \operatorname{colg} \cos 34^\circ 26' = 1,02366 + 0,98357 = 1,10723, \text{ de unde: } b = 12,80. \text{ În același mod găsim: } c = 18,68, a = 22,65.$$

**9. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care se dă perimetrul  $2p$  și raza cercului înscris  $r$ . Discuție. Să se facă efectiv calculele în cazul  $p = 18,42$ ,  $r = 2,76$ .**

*Soluție.* Să demonstrăm întâi următoarea relație:  $b + c = a + 2r$ .

(1)

Pentru aceasta să notăm cu  $I$  centrul cercului înscris în triunghiul  $ABC$  și cu  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  punctele de tangență ale acestuia (fig. VI, 1). Având în vedere că dreapta  $AI$  este bisectoarea unghiului  $A$ , rezultă că triunghiurile  $AB'I$  și  $AC'I$  sînt dreptunghice isoscele, deci:

$$AB' = AC' = r.$$

Pe de altă parte, avem  $BA' = BC'$  și  $CA' = CB'$ , de unde rezultă:

$$\begin{aligned} b + c &= (AB' + CB') + (AC' + BC') = \\ &= r + CA' + r + BA' = 2r + a. \end{aligned}$$

$$\text{Din relația (1) deducem: } a + b + c = 2a + 2r, \text{ adică: } p = a + r.$$

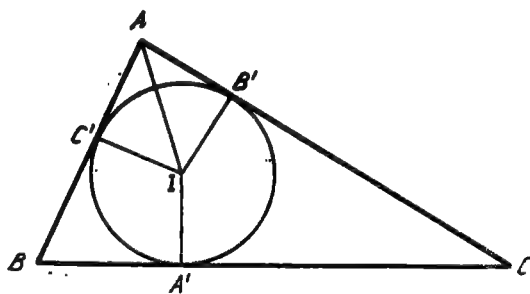


Fig. VI, 1

De aici rezultă:  $a = p - r$ .

Înlocuind în relația (1)  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ , găsim:  $a(\sin B + \cos B) = a + 2r$ .

$$\text{sau: } \sin B + \cos B = \frac{p+r}{p-r}.$$

Înlocuind aici pe  $\cos B$  cu  $\sin(90^\circ - B)$  și transformând suma în produs obținem:

$$2 \sin 45^\circ \cos(B - 45^\circ) = \frac{p+r}{p-r}, \text{ adică: } \cos(B - 45^\circ) = \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}}, \quad (2)$$

Ținând seama că  $0^\circ < B < 90^\circ$ , rezultă:  $-45^\circ < B - 45^\circ < 45^\circ$ , de unde rezultă:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos(B - 45^\circ) \leq 1, \text{ adică: } \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}} \leq 1.$$

De aici deducem:  $p - r < p + r \leq (p - r)\sqrt{2}$ .

Prima parte a inegalității este evidentă, iar din a doua deducem:  $r \leq \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} p$ , sau:

$$r \leq (3 - 2\sqrt{2})p, \quad (3)$$

care reprezintă condiția de posibilitate a problemei.

Presupunând această condiție satisfăcută și notînd cu  $\alpha$  cel mai mic unghi pozitiv pentru care  $\cos \alpha = \frac{p+r}{(p-r)\sqrt{2}}$ , din (2) găsim:  $B = 45^\circ + \alpha$  și deci:

$$C = 45^\circ - \alpha^*.$$

Cu aceste valori calculăm catetele  $b$  și  $c$  cu formulele:  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ . Dacă  $r = (3 - 2\sqrt{2})p$  avem  $\alpha = 0$  și triunghiul este dreptunghic isoscel.

În cazul numeric condiția (3) este satisfăcută și avem:  $\cos(B - 45^\circ) = \frac{21,18}{15,66\sqrt{2}}$ ,  
adică:  $\lg \cos(B - 45^\circ) = \lg 21,18 + \operatorname{colg} 15,66 + \frac{1}{2} \operatorname{colg} 2 = 1,32593 + \overline{2},80521 + \overline{1},84949 =$   
 $= \overline{1},98063.$

De aici rezultă:  $B - 45^\circ = 16^\circ 59'$ , deci:  $B = 61^\circ 59'$  și  $C = 28^\circ 1'$ .

De asemenea, avem:  $a = p - r = 15,66$ .

Din formulele  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$  deducem:  $b = 13,825$ ,  $c = 7,355$ . Se verifică că  $a + b + c = 2p$ .

10. Se consideră un triunghi  $ABC$ , dreptunghic în  $A$ , în care:  $\frac{a+b}{c} = k$ , ( $k = \text{const.}$ ).

Se cere să se calculeze  $\operatorname{tg} \frac{B}{2}$ . Pentru ce valori ale lui  $k$  unghiul  $B$  este cel mai mic unghi al triunghiului?

*Soluție.* Înlocuind în relația dată  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ , obținem:  $\frac{1 + \sin B}{\cos B} = k$ .

Ținând seama că  $\sin B = \cos(90^\circ - B)$ ,  $\cos B = \sin(90^\circ - B)$ , această relație se poate scrie sub forma:  $\frac{1 + \cos(90^\circ - B)}{\sin(90^\circ - B)} = k$ , sau, avînd în vedere formula  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ :  
 $\operatorname{ctg} \frac{90^\circ - B}{2} = k$ , adică:  $\operatorname{ctg} \left( 45^\circ - \frac{B}{2} \right) = k$ .

Dezvoltînd expresia din membrul întîi, obținem:  $\frac{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + 1}{\operatorname{ctg} \frac{B}{2} - 1} = k$ . De aici rezultă:

$$\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{k+1}{k-1}, \text{ de unde:}$$

$$\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{k-1}{k+1}, \quad (1)$$

\* Dacă luăm  $B = 45^\circ - \alpha$ , găsim  $C = 45^\circ + \alpha$ , adică același triunghi.



Pentru ca unghiul  $B$  să fie cel mai mic unghi al triunghiului  $ABC$ , trebuie ca  $B < 45^\circ$ , adică:  $0 < \operatorname{tg} B < 1$ . Dar, ținând seama de formula (1), găsim:  $\operatorname{tg} B = \frac{k^2 - 1}{2k}$ , deci condiția de

mai sus se scrie:  $0 < \frac{k^2 - 1}{2k} < 1$ .

Având în vedere că  $k > 0$ , această inegalitate se descompune în inegalitățile:  $k^2 - 1 > 0$ ,  $k^2 - 2k - 1 < 0$ . De aici rezultă:  $1 < k < 1 + \sqrt{2}$ .

**11.** Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$ , în care avem relația:  $\sin B \operatorname{tg} B = \frac{b^2}{ac}$  este dreptunghic.

*Soluție.* Relația dată se mai poate scrie:  $\frac{\sin^2 B}{\cos B} = \frac{b^2}{ac}$ .

Din teorema sinusurilor avem:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ .

Înlocuind aceste valori în relația de mai sus obținem:  $\frac{\sin^2 B}{\cos B} = \frac{\sin^2 B}{\sin A \sin C}$ , sau:  $\sin A \sin C = \cos B$ .

Transformând produsul de sinusuri într-o diferență, găsim:  $\cos(A - C) - \cos(A + C) = 2 \cos B$ .

Dar  $A + C = 180^\circ - B$ , deci  $\cos(A + C) = -\cos B$ . Rezultă că relația dată devine:  $\cos(A - C) = \cos B$ , de unde:  $A - C = \pm B$ .

Deci  $A = B + C$  sau  $C = A + B$ , adică  $A = 90^\circ$  sau  $C = 90^\circ$ .

Triunghiul este dreptunghic în  $B$  sau în  $C$ .

**12.** Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$ , în care avem:

$$1 + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C} \text{ este dreptunghic.}$$

*Soluție.* Ținând seama că  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1$ , rezultă:  $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - B\right) =$

$$\frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1} \text{ și relația dată se scrie: } 1 + \frac{\operatorname{ctg} B + 1}{\operatorname{ctg} B - 1} = \frac{2}{1 - \operatorname{ctg} C}, \text{ de unde}$$

deducem:  $\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C = 1$ , sau:  $\cos B \cos C = \sin B \sin C$ .

De aici rezultă:  $\cos(B + C) = 0$ ,

adică, având în vedere că  $B$  și  $C$  sînt unghiuri ale unui triunghi,  $B + C = \frac{\pi}{2}$  și deci triunghiul este dreptunghic în  $A$ .

**13.** Să se demonstreze că dacă:  $\frac{b^2}{\operatorname{tg} B} + \frac{c^2}{\operatorname{tg} C} = 4S$ , atunci triunghiul  $ABC$  este dreptunghic.

*Soluție.* Relația dată se mai poate scrie:  $\frac{b^2 \cos B}{\sin B} + \frac{c^2 \cos C}{\sin C} = 4S$ .

Dar:  $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  și  $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ ,  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ , deci obținem:

$$b^2(a^2 + c^2 - b^2) + c^2(a^2 + b^2 - c^2) = \frac{4Sabc}{R}. \text{ Având în vedere că: } R = \frac{abc}{4S}$$

și  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , relația dată devine:  $a^2b^2 + a^2c^2 + 2b^2c^2 - b^4 - c^4 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ , adică:  $a^2 = b^2 + c^2$ .

**14.** Să se demonstreze că triunghiul  $ABC$  în care

$$\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$$

este dreptunghic sau isoscel.

*Soluție.* Relația dată se mai poate scrie:  $\sin B - \sin C = \cos C - \cos B$ , sau, transformând diferențele în produse:  $2 \sin \frac{B-C}{2} \cos \frac{B+C}{2} = 2 \sin \frac{B-C}{2} \sin \frac{B+C}{2}$ .

De aici rezultă:  $\sin \frac{B-C}{2} \left( \cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2} \right) = 0$ . Dacă:  $\sin \frac{B-C}{2} = 0$ , avem:  $B - C = 0$  și triunghiul este isoscel.

Dacă:  $\cos \frac{B+C}{2} - \sin \frac{B+C}{2} = 0$ , rezultă:  $\tan \frac{B+C}{2} = 1$ ,  $\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4}$ , de unde  $A = \frac{\pi}{2}$

**15. Să se arate că triunghiul  $ABC$  în care:**

$$\sin \frac{A}{2} \cos^3 \frac{B}{2} = \sin \frac{B}{2} \cos^3 \frac{A}{2}$$

*este isoscel.*

*Soluție.* Înmulțind ambii membri ai egalității date cu  $2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$ , produs care este nenul pentru că  $\frac{A}{2} \neq 90^\circ$ ,  $\frac{B}{2} \neq 90^\circ$ , obținem:  $\sin A \cos^4 \frac{B}{2} = \sin B \cos^4 \frac{A}{2}$ .

$$\text{Dar } \cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1 + \cos B}{2}, \text{ deci: } \sin A (1 + \cos B)^2 = \sin B (1 + \cos A)^2$$

sau, înlocuind pe  $\cos^2 B$  cu  $1 - \sin^2 B$  și pe  $\cos^2 A$  cu  $1 - \sin^2 A$ ,  $2(\sin A \cos B - \sin B \cos A) + 2(\sin A - \sin B) + \sin A \sin B (\sin A - \sin B) = 0$ , care se mai poate scrie:  $2 \sin (A - B) + (\sin A - \sin B) (2 + \sin A \sin B) = 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Avînd în vedere că: } \sin (A - B) &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}, \sin A - \sin B = \\ &= 2 \sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A+B}{2}, \text{ relația de mai sus se scrie: } \sin \frac{A-B}{2} \left( 2 \cos \frac{A+B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} + \right. \\ &\left. + \sin A \sin B \cos \frac{A+B}{2} \right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} &= 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}, \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}, \sin B = \\ &= 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}, \cos \frac{A+B}{2} = \sin \frac{C}{2}, \text{ deci egalitatea dată devine:} \end{aligned}$$

$$\sin \frac{A-B}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right) = 0.$$

Factorii  $\cos \frac{A}{2}$  și  $\cos \frac{B}{2}$  nu pot fi nuli; avînd în vedere că  $A, B, C$  sînt unghiuri ale unui triunghi rezultă că  $\sin \frac{A}{2} > 0$ ,  $\sin \frac{B}{2} > 0$ ,  $\sin \frac{C}{2} > 0$ , deci:  $1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 1$ .

Rezultă că relația dată este echivalentă cu:  $\sin \frac{A-B}{2} = 0$ , deci cu:  $A - B = 0$  și triunghiul este isoscel.

**16. Să se arate că triunghiul  $ABC$ , în care:  $c^2 \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = 4S$  este isoscel.**

*Soluție.* Avem:  $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}}$  și  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ , deci relația

$$\text{dată se scrie: } c^2 \sqrt{\frac{p(p-c)}{(p-a)(p-b)}} = 4 \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

adică:  $c^2 = 4(p-a)(p-b)$ , sau:  $c^2 = (-a+b+c)(a-b+c)$ .

De aici deducem:  $c^2 = c^2 - (a-b)^2$ , deci:  $a = b$ .

**17. Să se determine forma triunghiului  $ABC$ , în care:**

$$8 \sin A \sin B \cos C + 1 = 0.$$

*Soluție.* Având în vedere că:  $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$  și că  $\cos(A+B) = -\cos C$ , rezultă că relația dată se mai poate scrie:  $4 \cos C [\cos(A-B) + \cos C] + 1 = 0$ , sau, înlocuind pe 1 cu  $\cos^2(A-B) + \sin^2(A-B)$ ,  $4 \cos^2 C + 4 \cos C \cos(A-B) + \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) = 0$ , adică  $[2 \cos C + \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0$ .

De aici deducem:  $\sin(A-B) = 0$ ,  $2 \cos C + \cos(A-B) = 0$ .

Prima relație ne dă  $A = B$ . Cu aceasta, a doua relație devine:  $\cos C = -\frac{1}{2}$ , deci:  $C = 120^\circ$ .

De aici rezultă că:  $A = B = 30^\circ$ .

Triunghiul  $ABC$  este deci un triunghi isoscel, având unghiurile egale de câte  $30^\circ$ .

**18. Să se arate că dacă:  $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{p} = 2c^2$ ,  $\sin A \sin B = \sin^2 C$ , triunghiul  $ABC$  este echilateral.**

*Soluție.* Prima relație se mai poate scrie:  $a^3 + b^3 + c^3 = c^2(a+b+c)$ , sau:  $(a+b)(a^2 - ab + b^2 - c^2) = 0$ . De aici deducem:  $a^2 + b^2 = ab + c^2$ . Dar:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ , deci:  $\cos C = \frac{1}{2}$ , adică:  $C = 60^\circ$ .

Cu această valoare, a doua relație dată devine:  $\sin A \sin B = \frac{3}{4}$ .

Transformând produsul de sinusuri în sumă, găsim:  $\cos(A-B) - \cos(A+B) = \frac{3}{2}$ , sau, având în vedere că  $A+B = 120^\circ$ ,  $\cos(A-B) = 1$ , deci  $A-B = 0$ . De aici rezultă că  $A = B = C = 60^\circ$ .

**19. Să se arate că un triunghi  $ABC$ , în care:  $8 \cos A \cos B \cos C = 1$  este echilateral.**

*Soluție.* Ținând seama de formulele de transformare ale unui produs de cosinusuri în sumă rezultă:  $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$  sau, având în vedere că  $\cos(A+B) = -\cos C$ :  $2 \cos A \cos B = \cos(A-B) - \cos C$ . Cu aceasta, relația dată se scrie:  $4 \cos C [\cos(A-B) - \cos C] = 1$  sau, înlocuind pe 1 cu  $\sin^2(A-B) + \cos^2(A-B)$ ,  $4 \cos^2 C - 4 \cos C \cos(A-B) + \cos^2(A-B) + \sin^2(A-B) = 0$ , adică:  $[2 \cos C - \cos(A-B)]^2 + \sin^2(A-B) = 0$ .

Dar o sumă de pătrate este nulă numai dacă fiecare termen al sumei este nul, deci:  $\sin(A-B) = 0$ ,  $2 \cos C - \cos(A-B) = 0$ .

Din prima relație deducem  $A = B$ , care înlocuită în a doua ne dă:  $\cos C = \frac{1}{2}$ .

Rezultă că  $C = 60^\circ$  și deci  $A+B = 120^\circ$ , de unde  $A = B = 60^\circ$ .

Triunghiul este deci echilateral.

**20. Să se determine forma triunghiului  $ABC$ , în care avem relația:**

$$\operatorname{tg} 2B + \sec 2B = \frac{c+b}{c-b},$$

*Soluție.* Relația dată se mai poate scrie:  $\frac{\sin 2B + 1}{\cos 2B} = \frac{c + b}{c - b}$  sau:  $\frac{1 + 2 \sin B \cos B}{1 - 2 \sin^2 B} = \frac{c + b}{c - b}$ . Având în vedere că  $b = 2R \sin B$  și  $c = 2R \sin C$ , deducem:  $\frac{1 + 2 \sin B \cos B}{1 - 2 \sin^2 B} = \frac{\sin C + \sin B}{\sin C - \sin B}$ .

Scăzând numitorii din numărători și lăsând numitorii neschimbați găsim:

$$\frac{2 \sin B (\sin B + \cos B)}{1 - 2 \sin^2 B} = \frac{2 \sin B}{\sin C - \sin B},$$

sau, simplificând cu  $2 \sin B \neq 0$ ,  $(\sin B + \cos B) (\sin C - \sin B) = 1 - 2 \sin^2 B$ , sau încă:  $(\sin B + \cos B) (\sin C - \cos B) = 0$ .

Dacă  $\sin B + \cos B = 0$ , rezultă  $\operatorname{tg} B = -1$ , adică  $B = 135^\circ$  și relația dată n-are sens.

Deci relația dată se reduce la:  $\sin C - \cos B = 0$  sau:  $\cos B = \cos (90^\circ - C)$ . De aici rezultă:  $B = \pm (90^\circ - C)$ . Deci:  $B + C = 90^\circ$ , sau:  $C - B = 90^\circ$ . Rezultă că triunghiul  $ABC$  este sau dreptunghic în  $A$  sau are  $C - B = 90^\circ$ .

**21. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem relația:**

$$\frac{\cos B - \cos C}{p - a} + \frac{\cos C - \cos A}{p - b} + \frac{\cos A - \cos B}{p - c} = 0.$$

*Soluție.* Ținând seama de teorema cosinusului rezultă:

$$\begin{aligned} \frac{\cos B - \cos C}{p - a} &= \frac{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}}{\frac{-a + b + c}{2}} = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2) - c(a^2 + b^2 - c^2)}{abc(-a + b + c)} = \\ &= \frac{a^2(b - c) - bc(b - c) - (b - c)(b^2 + bc + c^2)}{abc(-a + b + c)} = \frac{(b - c)[a^2 - (b + c)^2]}{abc(-a + b + c)} = \\ &= \frac{(b - c)(a - b - c)(a + b + c)}{abc(-a + b + c)} = \frac{2p(c - b)}{abc}. \end{aligned}$$

Analog, avem:  $\frac{\cos C - \cos A}{p - b} = \frac{2p(a - c)}{abc}$ ,  $\frac{\cos A - \cos B}{p - c} = \frac{2p(b - a)}{abc}$ .

Cu aceste valori avem:

$$\frac{\cos B - \cos C}{p - a} + \frac{\cos C - \cos A}{p - b} + \frac{\cos A - \cos B}{p - c} = \frac{2p}{abc} (c - b + a - c + b - a) = 0.$$

**22. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relația:**

$$(b + c) \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} + (c + a) \operatorname{tg} \frac{C - A}{2} + (a + b) \operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = 0.$$

*Soluție.* Ținând seama că:  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , rezultă că:  $(b + c) \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = 2R (\sin B + \sin C) \operatorname{tg} \frac{B - C}{2}$  sau, transformând suma de sinusuri în produs:

$$(b + c) \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = 4R \sin \frac{B + C}{2} \sin \frac{B - C}{2}.$$

Transformând produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri găsim:

$$(b + c) \operatorname{tg} \frac{B - C}{2} = 2R (\cos C - \cos B).$$

$$\begin{aligned} \text{Analog, avem: } (c+a) \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} &= 2R (\cos A - \cos C); (a+b) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \\ &= 2R (\cos B - \cos A) \text{ deci: } (b+c) \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} + (c+a) \operatorname{tg} \frac{C-A}{2} + (a+b) \operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \\ &= 2R (\cos C - \cos B + \cos A - \cos C + \cos B - \cos A) = 0. \end{aligned}$$

**23. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relația:  $a^2 - b^2 = 2S(\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$ .**

*Soluție.* Avem relația:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ .

Dar:  $S = \frac{bc \sin A}{2}$ , deci:  $bc = \frac{2S}{\sin A}$ . Cu această expresie, relația de mai sus se scrie:  $a^2 = b^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} A$ . Analog, avem:  $b^2 = a^2 + c^2 - 4S \operatorname{ctg} B$ .

Scăzând aceste două relații rezultă:  $a^2 - b^2 = b^2 - a^2 + 4S (\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$  sau:  $2(a^2 - b^2) = 4S (\operatorname{ctg} B - \operatorname{ctg} A)$ .

**24. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem:**

$$a^2 = b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C).$$

*Soluție.* Avem:  $b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C) = b^2(1 - 2\sin^2 C) + c^2(1 - 2\sin^2 B) + 2bc (\cos B \cos C + \sin B \sin C) = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + 2bc \cos A - 2b^2 \sin^2 C - 2c^2 \sin^2 B + 2bc (\cos B \cos C + \sin B \sin C)$ . Dar:  $b^2 + c^2 - 2bc \cos A = a^2$  și:  $2bc \cos A = -2bc \cos (B + C) = -2bc (\cos B \cos C - \sin B \sin C)$ .

Cu aceste valori, obținem:

$$\begin{aligned} b^2 \cos 2C + c^2 \cos 2B + 2bc \cos (B - C) &= a^2 - 2bc (\cos B \cos C - \sin B \sin C) + \\ &+ 2bc (\cos B \cos C + \sin B \sin C) - 2b^2 \sin^2 C - 2c^2 \sin^2 B = a^2 - 2b^2 \sin^2 C + \\ &+ 4bc \sin B \sin C - 2c^2 \sin^2 B = a^2 - (b \sin C - c \sin B)^2 = a^2. \end{aligned}$$

**25. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relațiile:**

$$1^\circ \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{r}{4R}, \quad 2^\circ \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{p}{4R}.$$

*Soluție.* 1° Ținând seama de formulele:

$$\begin{aligned} \sin \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \\ \text{rezultă: } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{Dar: } (p-a)(p-b)(p-c) = \frac{S^2}{p} \text{ și: } abc = 4RS.$$

$$\text{Cu aceste valori, avem: } \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{\frac{S^2}{p}}{4RS} = \frac{S}{4Rp} = \frac{pr}{4Rp} = \frac{r}{4R}.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ \text{ Avem: } \cos \frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}; \cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}. \text{ Cu aceste} \\ \text{valori: } \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{p \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{pS}{4RS} = \frac{p}{4R}. \end{aligned}$$

**26. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem relațiile:**

$$1^\circ \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{p^2}{abc}, \quad 2^\circ \cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 + \frac{r}{2R},$$

$$3^\circ a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = p + \frac{S}{R}.$$

*Soluție.* 1° Ținând seama că:  $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$ ,  $\cos \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}$ ,  $\cos \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$ ,

rezultă că:  $\frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\cos^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{p}{abc} (p-a + p-b + p-c) = \frac{p}{abc} (3p-2p) = \frac{p^2}{abc}.$

2° Avem:  $\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1+\cos A}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{B}{2} = \frac{1+\cos B}{2}$ ,  $\cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1+\cos C}{2}$ , (1)

deci:  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2} (3 + \cos A + \cos B + \cos C).$

Dar:  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$ , de unde:  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \right),$

Având în vedere că:

$$\sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}, \quad \sin \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ac}}, \quad \sin \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

rezultă:  $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{\frac{S^2}{4R}}{abc} = \frac{S}{4pR} = \frac{pr}{4pR} = \frac{r}{4R},$

deci:  $\cos^2 \frac{A}{2} + \cos^2 \frac{B}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 2 \left( 1 + \frac{r}{4R} \right) = 2 + \frac{r}{2R}.$

3° Folosind formulele (1) rezultă:  $a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = \frac{1}{2} (a + b + c + a \cos A + b \cos B + c \cos C) = \frac{1}{2} (2p + a \cos A + b \cos B + c \cos C).$

Având în vedere formulele  $a = 2R \sin A$  etc., deducem:  $a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = p + R(\sin A \cos A + \sin B \cos B + \sin C \cos C) = p + \frac{R}{2} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C).$

Dar  $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$ , deci:  $a \cos^2 \frac{A}{2} + b \cos^2 \frac{B}{2} + c \cos^2 \frac{C}{2} = p + 2R \sin A \sin B \sin C = p + 2R \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R} = p + \frac{abc}{4R^2} = p + \frac{4RS}{4R^2} = p + \frac{S}{R}.$

**27.** Dacă  $l$ ,  $m$  și  $n$  sînt distanțele de la centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$  la laturile triunghiului, atunci:

$$4 \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = \frac{abc}{lmn}.$$

*Soluție.* Fie  $L$ ,  $M$ ,  $N$  proiecțiile punctului  $O$  pe laturile  $BC$ ,  $AC$ ,  $AB$ .

Avem:  $\widehat{COL} = A$ ,  $\widehat{AOM} = B$ ,  $\widehat{BON} = C$ ,

deci:  $l = R \cos A$ ,  $m = R \cos B$ ,  $n = R \cos C$ .

Cu aceste valori, avem:  $4 \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = 4 \left( \frac{a}{R \cos A} + \frac{b}{R \cos B} + \frac{c}{R \cos C} \right).$

Ținând seama aici că:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , rezultă:

$$4 \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = 8 (\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C).$$

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C &= \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C, \text{ deci: } 4 \left( \frac{a}{l} + \frac{b}{m} + \frac{c}{n} \right) = 8 \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = \\ &= 8 \frac{\sin A \sin B \sin C}{\cos A \cos B \cos C} = \frac{2R \sin A \cdot 2R \sin B \cdot 2R \sin C}{R \cos A \cdot R \cos B \cdot R \cos C} = \frac{abc}{lmn}. \end{aligned}$$

**28.** Să se determine unghiurile unui triunghi  $ABC$  ale cărui laturi sînt proporționale cu numerele  $1 + \sqrt{3}$ ,  $\sqrt{6}$ ,  $2$ .

*Soluție.* Avînd în vedere că:  $a = (1 + \sqrt{3})k$ ,  $b = \sqrt{6}k$ ,  $c = 2k$ , teorema cosinusului, scrisă pentru fiecare dintre laturile triunghiului, ne dă:  $\cos A = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ ,  $\cos B = \frac{1}{2}$ ,  $\cos C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

Unghiurile triunghiului sînt deci:  $A = 75^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $C = 45^\circ$ .

**29.** Știind că  $a = \frac{7c}{3}$ ,  $b = \frac{8c}{3}$ , să se determine valoarea unghiului  $A$ .

*Soluție.* Scriind teorema cosinusului corespunzătoare laturii  $a$ , obținem:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{64c^2}{9} + c^2 - \frac{49c^2}{9}}{\frac{16c^2}{8}} = \frac{1}{2}.$$

De aici rezultă:  $A = 60^\circ$ .

**30.** Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care:  $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ .

$$\text{Soluție. Avem: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{16} - \frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{4}} = \frac{1}{2}.$$

De aici rezultă:  $A = 60^\circ$ .

$$\text{Din teorema sinusului deducem: } \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ adică: } B = 45^\circ. \text{ Deci:}$$

$$C = 180^\circ - (A + B) = 75^\circ.$$

**31.** Să se rezolve triunghiul  $ABC$  în care sînt date laturile  $b$  și  $c$  și lungimea  $l$  a bisectoarei unghiului  $A$ . *Discuție. Aplicație:*  $b = 54$ ,  $c = 41$ ,  $l = 37$ .

*Soluție.* Dacă notăm cu  $D$  piciorul bisectoarei unghiului  $A$ , atunci avem:

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ADC}, \text{ adică: } bc \sin A = bl \sin \frac{A}{2} + cl \sin \frac{A}{2}. \text{ Dar: } \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2},$$

$$\text{deci de aici deducem: } 2bc \cos \frac{A}{2} = l(b + c) \text{ sau: } \cos \frac{A}{2} = \frac{l(b + c)}{2bc}.$$

$$\text{Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca: } \frac{l(b + c)}{2bc} < 1,$$

$$\text{adică } l < \frac{2bc}{b + c}, \text{ care reprezintă condiția problemei.}$$

Dacă această condiție este satisfăcută, determinăm unghiul  $A$  și problema se reduce la cazul doi de rezolvare a triunghiurilor oarecare.

În aplicația numerică avem:  $\cos \frac{A}{2} = \frac{37 \cdot 95}{2 \cdot 54 \cdot 41}$ .

deci:  $\lg \cos \frac{A}{2} = \lg 37 + \lg 95 + \operatorname{colg} 2 + \operatorname{colg} 54 + \operatorname{colg} 41 = 1,56820 + 1,97772 + \overline{1,69897} +$   
 $+ 2,26761 + \overline{2,38722} = \overline{1,89972}$ .

De aici rezultă:  $\frac{A}{2} = 37^\circ 27' 24''$ , adică:  $A = 74^\circ 54' 48''$ .

Din formula:  $\operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ , rezultă:  $\lg \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} = \lg 13 + \lg \operatorname{ctg} 37^\circ 27' 24'' +$   
 $+ \operatorname{colg} 95 = 1,11394 + 0,11570 + \overline{2,02228} = \overline{1,25192}$ , de unde:  $\frac{B-C}{2} = 10^\circ 7' 38''$ ,

adică:  $B - C = 20^\circ 15' 16''$ .

De aici și din  $B + C = 180^\circ - A = 105^\circ 5' 12''$  deducem:  $B = 62^\circ 40' 14''$ ,  $C = 42^\circ 24' 58''$ .

În sfârșit, din formula:  $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$  rezultă:  $a = 58,69$ .

**32. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , cunoscând latura  $a$ , diferența  $c - b = d$ , și știind că  $C = 2B$ .**

*Soluție.* Avem:  $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - 3B$ .

Din teorema sinusurilor deducem:  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b-c}{\sin B - \sin C}$ , adică:  $\frac{a}{\sin 3B} =$   
 $= \frac{d}{\sin 2B - \sin B}$ .

Dar  $\sin 3B = \sin B(4 \cos^2 B - 1)$ ,  $\sin 2B = 2 \sin B \cos B$ , deci:

$$\frac{a}{\sin B(4 \cos^2 B - 1)} = \frac{d}{\sin B(2 \cos B - 1)}.$$

De aici rezultă:  $\frac{a}{2 \cos B + 1} = d$ , de unde:  $\cos B = \frac{a-d}{2d}$ .

Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca:  $\frac{a-d}{2d} < 1$ , adică:  $a < 3d$ .

Presupunând această condiție îndeplinită, din (1) rezultă unghiul  $B$  și deci unghiurile  $A$  și  $C$ . Din teorema sinusurilor obținem laturile  $b$  și  $c$ .

**33. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau unghiurile  $A$  și  $B$  și aria  $S = \frac{k^2}{2}$ .**

*Soluție.* Avem:  $S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin A}$ . De aici rezultă:  $a^2 = \frac{k^2 \sin A}{\sin B \sin C}$ ,

adică:  $a^2 = \frac{k^2 \sin A}{\sin B \sin (A+B)}$ .

Laturile  $b$  și  $c$  se calculează din formulele:  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ ,  $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ .

**34. Să se rezolve un triunghi în care se cunoaște o latură, suma celorlalte două și aria. Discuție.**

*Soluție.* Ni se dau deci  $a$ ,  $b + c = l$  și  $S$ .



Scriind teorema cosinusului sub forma:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc(1 + \cos A)$ , rezultă:

$$bc = \frac{l^2 - a^2}{2(1 + \cos A)}.$$

De asemenea, din formula:  $S = \frac{bc \sin A}{2}$ , deducem:  $bc = \frac{2S}{\sin A}$ .

Din aceste două relații obținem:  $\frac{l^2 - a^2}{2(1 + \cos A)} = \frac{2S}{\sin A}$  sau, avind în vedere că  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$ ,  $1 + \cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2}$ ,  $\frac{l^2 - a^2}{2 \cdot 2 \cos^2 \frac{A}{2}} = \frac{2S}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$ , adică:  $\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{4S}{l^2 - a^2}$ .

De aici deducem valoarea unghiului  $A$ . Înlocuind această expresie a lui  $\operatorname{tg} \frac{A}{2}$  în (1), obținem:  $bc = \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{4(l^2 - a^2)}$ .

Ținând seama că  $b + c = l$ , rezultă că  $b$  și  $c$  sînt rădăcinile ecuației:

$$x^2 - lx + \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{4(l^2 - a^2)} = 0. \quad (2)$$

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcinile reale trebuie ca realizantul ei să fie pozitiv sau nul, adică:  $l^2 - \frac{16 S^2 + (l^2 - a^2)^2}{l^2 - a^2} \geq 0$  sau  $S^2 \leq \frac{a^2(l^2 - a^2)}{16}$ , deci:  $S \leq \frac{a}{4} \sqrt{l^2 - a^2}$ .

Dacă această condiție este satisfăcută, ecuația (2) are rădăcinile pozitive (suma și produsul rădăcinilor sînt numere pozitive).

Unghiul  $B$  rezultă din formula:  $\sin B = \frac{l \sin A}{a}$ .

**35. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau unghiul  $A$ , înălțimea  $h$  coborîtă din  $A$  și  $bc = m^2$ .**

*Soluție.* Notînd cu  $H$  proiecția lui  $A$  pe latura  $BC$ , din triunghiurile  $AHB$  și  $AHC$  deducem:  $b = h \sin C$ ,  $c = h \sin B$ , care, înlocuite în relația  $bc = m^2$ , ne dau:  $\sin B \sin C = \frac{m^2}{h^2}$ . (1)

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri rezultă:  $\cos(B - C) - \cos(B + C) = \frac{m^2}{2h^2}$

sau, avind în vedere că  $\cos(B + C) = -\cos A$ :  $\cos(B - C) = \frac{m^2}{2h^2} - \cos A$ .

De aici rezultă că problema are soluție dacă:  $0 < \frac{m^2}{2h^2} - \cos A \leq 1$ ,

sau:  $\cos A < \frac{m^2}{2h^2} \leq 1 + \cos A$ .

Avind în vedere că  $\cos A = 2 \cos^2 \frac{A}{2} - 1$ , această inegalitate devine:

$$\frac{m^2}{4h^2} \leq \cos^2 \frac{A}{2} < \frac{m^2 + 2h^2}{4h^2}, \text{ sau, } \text{ținînd seama că } \cos \frac{A}{2} > 0,$$

$\frac{m}{2h} \leq \cos \frac{A}{2} < \frac{\sqrt{m^2 + 2h^2}}{2h}$ , care reprezintă condiția de posibilitate a problemei.

Presupunind această condiție satisfăcută și notînd cu  $\alpha$  cel mai mic unghi pozitiv pentru care  $\cos \alpha = \frac{m^2}{2h^2} - \cos A$ , rezultă:  $B - C = \pm \alpha$ , care, împreună cu relația  $B + C = 180^\circ - A$ , ne dau:  $B = 90^\circ - \frac{A}{2} \pm \frac{\alpha}{2}$ ,  $C = 90^\circ - \frac{A}{2} \mp \frac{\alpha}{2}$ .

Problema are o singură soluție:  $B = 90^\circ - \frac{A}{2} + \frac{\alpha}{2}$ ,  $C = 90^\circ - \frac{A}{2} - \frac{\alpha}{2}$ , căci dacă luăm pe  $\alpha$  cu celălalt semn obținem același triunghi.

Înlocuind aceste valori în (1) obținem valorile laturilor  $b$  și  $c$ . Latura  $a$  se calculează cu formula:

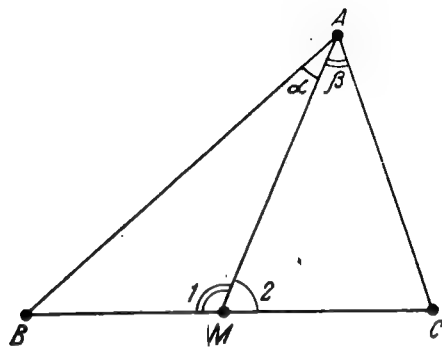


Fig. VI, 2

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{h \sin A \sin C}{\sin B},$$

**36. Într-un triunghi oarecare  $ABC$  se dau mediana  $m$  dusă din vîrfurile  $A$  și unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  pe care aceasta le face cu laturile  $AB$ , respectiv  $AC$ . Să se calculeze latura  $a$  a triunghiului.**

*Soluție.* Notînd cu  $M$  mijlocul laturii  $a$  și aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul  $ABM$  obținem

$$\text{(fig. VI, 2): } \frac{\frac{a}{2}}{\sin \alpha} = \frac{m}{\sin (M_1 + \alpha)},$$

$$\text{de unde: } \sin (M_1 + \alpha) = \frac{2m \sin \alpha}{a}.$$

$$\text{De asemenea, din triunghiul } ACM \text{ deducem: } \frac{\frac{a}{2}}{\sin \beta} = \frac{m}{\sin (M_1 - \beta)},$$

$$\text{de unde: } \sin (M_1 - \beta) = \frac{2m \sin \beta}{a}. \text{ Dezvoltînd, avem: } \sin M_1 \cos \alpha + \cos M_1 \sin \alpha = \frac{2m \sin \alpha}{a},$$

$$\sin M_1 \cos \beta - \cos M_1 \sin \beta = \frac{2m \sin \beta}{a}.$$

$$\text{Din acest sistem deducem: } \sin M_1 = \frac{4m \sin \alpha \sin \beta}{a \sin (\alpha + \beta)}, \quad \cos M_1 = \frac{2m \sin (\alpha - \beta)}{a \sin (\alpha + \beta)}.$$

$$\text{Ridicînd la pătrat și adunînd, obținem: } \frac{16 m^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{a^2 \sin^2 (\alpha + \beta)} + \frac{4 m^2 \sin^2 (\alpha - \beta)}{a^2 \sin^2 (\alpha + \beta)} = 1,$$

$$\text{de unde: } a = \frac{2m}{\sin (\alpha + \beta)} \sqrt{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 (\alpha - \beta)}.$$

$$\text{Pentru a obține o formulă calculabilă prin logaritmi, să notăm: } \frac{\sin (\alpha - \beta)}{2 \sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi.$$

$$\text{Cu aceasta obținem: } a = \frac{4m \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)} \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}, \text{ adică: } a = \frac{4m \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta) \cos \varphi}.$$

37. Să se determine expresiile laturilor  $a, b, c$ , a ariei  $S$  și a razei cercului circumscris  $R$ , în funcție de unghiurile triunghiului și de raza cercului înscris  $r$ .

Soluție. Din formulele:

$$S = pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}, \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}, \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

$$\text{rezultă: } r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg} \frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

De aici deducem:  $p-a = r \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ ,  $p-b = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ ,  $p-c = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ .

Adunând aceste trei relații obținem:  $p = r \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right)$ ,

de unde:  $a = r \left( \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right) = r \frac{\frac{\sin \frac{B+C}{2}}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = r \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$

Analog, găsim:  $b = r \frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{C}{2}}$ ,  $c = r \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}}.$

Din formula:  $S = pr$  deducem:  $S = r^2 \left( \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right).$

Dar:  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ , deci:  $S = r^2 \operatorname{ctg} \frac{A}{2} \operatorname{ctg} \frac{B}{2} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}.$

Din formula:  $R = \frac{abc}{4S}$  rezultă:  $R = \frac{r^3 \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin^2 \frac{A}{2} \sin^2 \frac{B}{2} \sin^2 \frac{C}{2}}}{4r^2 \frac{\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} = \frac{r}{4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}.$

38. Să se rezolve triunghiul  $ABC$  în care se dau unghiul  $A$ , perimetrul  $2p$  și raza  $R$  a cercului circumscris.

Soluție. Avem:  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$ , (1)

de unde:  $2R(\sin A + \sin B + \sin C) = 2p$ , adică:  $\sin B + \sin C = \frac{p}{R} - \sin A.$

Transformând în produs, obținem:  $2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = \frac{p}{R} - \sin A,$

de unde:  $\cos \frac{B-C}{2} = \frac{p - R \sin A}{2R \cos \frac{A}{2}}.$  (2)

Pentru ca problema să aibă soluții trebuie ca:  $0 < \frac{p - R \sin A}{2R \cos \frac{A}{2}} \leq 1$ .

Prima parte a inegalității ne dă:  $p > R \sin A$ , iar a doua:  $p \leq R \left( \sin A + 2 \cos \frac{A}{2} \right)$

sau:  $p \leq 2R \cos \frac{A}{2} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right)$ .

Deci, condiția problemei este:  $R \sin A < p \leq 2R \cos \frac{A}{2} \left( 1 + \sin \frac{A}{2} \right)$ .

În cazul în care această condiție este satisfăcută, din (2) rezultă valoarea diferenței  $B - C$ , care împreună cu  $B + C = 180^\circ - A$  ne dau unghiurile  $B$  și  $C$ . Cu aceste valori, din (1) rezultă  $a, b, c$ .

**39. Să se rezolve un triunghi cunoscând latura mijlocie  $b$ , aria  $S = m^2$  și știind că cele trei unghiuri sînt în progresie aritmetică.**

**Soluție.** Să presupunem că  $C$  este cel mai mic unghi al triunghiului. Știind că  $b$  este latura mijlocie, rezultă că:  $C < B < A$ .

Notînd cu  $\alpha$  rația progresiei aritmetice, rezultă:  $A = B + \alpha$ ,  $C = B - \alpha$ .

Ținînd seama că  $A + B + C = 180^\circ$ , deducem:  $B = 60^\circ$ .

Avînd în vedere în formula:  $S = \frac{b^2 \sin A \sin C}{2 \sin B}$ , și că:  $S = m^2$ ,  $A = 60^\circ + \alpha$ ,  $B =$

$= 60^\circ$ ,  $C = 60^\circ - \alpha$ , obținem:  $\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha) = \frac{m^2 \sqrt{3}}{b^2}$ .

Transformînd produsul de sinusuri într-o diferență de cosinusuri, deducem:  $\cos 2\alpha = -\cos 120^\circ = \frac{2m^2 \sqrt{3}}{b^2}$  sau, avînd în vedere că  $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ :  $\cos 2\alpha = \frac{4m^2 \sqrt{3} - b^2}{2b^2}$ . (1)

Dar. avem  $\alpha < 60^\circ$ , deci  $2\alpha < 120^\circ$ , adică  $-\frac{1}{2} < \cos 2\alpha \leq 1$ .

Ținînd seama de valoarea lui  $\cos 2\alpha$  rezultă:  $-\frac{1}{2} < \frac{4m^2 \sqrt{3} - b^2}{2b^2} \leq 1$ ,  
sau:  $-b^2 < 4m^2 \sqrt{3} - b^2 \leq 2b^2$ .

Prima parte a inegalității este identic satisfăcută, deci rămîne:  $4m^2 \sqrt{3} - b^2 \leq 2b^2$ ,  
adică:  $m^2 \leq \frac{b^2 \sqrt{3}}{4}$ .

Presupunînd că această condiție este satisfăcută, din (1) rezultă valoarea lui  $\alpha$  și deci unghiurile  $A$  și  $C$ . Din formulele:

$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ ,  $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$ , deducem laturile  $a$  și  $c$ .

**40. Să se demonstreze că în triunghiul  $ABC$ , în care mediana  $AM$  este egală cu latura  $c$ , avem:  $\operatorname{tg} B = 3 \operatorname{tg} C$ ,  $\sin A = 2 \sin(B - C)$ .**

**Soluție.** Dacă notăm  $AM = m$ , teorema medianei se scrie:  $m^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ,

sau, ținînd seama că  $m = c$ ;  $c^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$ ,

adică:  $c^2 = b^2 - \frac{a^2}{2}$ .

Teorema cosinusului, scrisă pentru latura  $c$ , ne dă:  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

Înlocuind aici valoarea lui  $c$  de mai sus obținem:  $3a = 4b \cos C$ .

Dar  $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ , deci:  $3 \sin A = 4 \sin B \cos C$ . (1)

Având în vedere că  $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$ , această relație devine:  $3 \sin C \cos B = \sin B \cos C$ , adică:  $3 \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} B$ .

Să scădem acum din egalitatea (1) egalitatea  $2 \sin A = 2 \sin(B + C)$ .

Obținem:  $\sin A = 2(\sin B \cos C - \sin C \cos B)$ , sau:  $\sin A = 2 \sin(B - C)$ .

**41. Unghiurile unui triunghi  $ABC$  formează o progresie aritmetică. Se cere să se determine unghiurile triunghiului știind că suma sinusurilor lor este egală cu  $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ .**

*Soluție.* Presupunând  $A < B < C$  și notând cu  $\alpha$  rația progresiei, avem:  $A = B - \alpha$ ,  $C = B + \alpha$ , deci:  $B - \alpha + B + B + \alpha = 180^\circ$ , de unde:  $B = 60^\circ$ .

Condiția dată devine:  $\sin(60^\circ - \alpha) + \sin 60^\circ + \sin(60^\circ + \alpha) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$ ,

adică:  $2 \sin 60^\circ \cos \alpha = \frac{3}{2}$ , deci:  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

De aici rezultă  $\alpha = 30^\circ$  și deci unghiurile triunghiului sînt:  $A = 30^\circ$ ,  $B = 60^\circ$ ,  $C = 90^\circ$ .

**42. Într-un triunghi  $ABC$  laturile sînt în progresie aritmetică, latura  $a$  fiind latură mijlocie. Se cere:**

1° Să se demonstreze că avem relația:  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{3}$ .

2° Fiind dată valoarea unghiului  $A$  să se determine unghiurile  $B$  și  $C$ . *Discuție.*

*Soluție.* 1° Dacă notăm cu  $l$  rația progresiei, avem:  $b = a - l$ ,  $c = a + l$ .

De aici rezultă:  $2p = a + a - l + a + l = 3a$ , adică:  $p = \frac{3a}{2}$ .

Cu această valoare obținem:  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-c)}} \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} =$   

$$= \frac{p-a}{p} = \frac{\frac{3a}{2} - a}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{3}.$$

2° Ținînd seama de expresiile laturilor triunghiului, teorema sinusurilor se scrie:  $\frac{a}{\sin A} =$   
 $= \frac{a-l}{\sin B} = \frac{a+l}{\sin C}$ , de unde:  $\frac{2a}{\sin B + \sin C} = \frac{a}{\sin A}$ , sau:  $2 \sin A = \sin B + \sin C$ .

Transformînd suma de sinusuri în produs, obținem:  $4 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} =$   
 $= 2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}$ , sau, avînd în vedere că  $\sin \frac{B+C}{2} =$   
 $= \cos \frac{A}{2} \neq 0$ :  $\cos \frac{B-C}{2} = 2 \sin \frac{A}{2}$ . (1)

Din această relație deducem valoarea diferenței  $B - C$  și, avînd în vedere că  $B + C = 180^\circ - A$ , obținem unghiurile  $B$  și  $C$ .

Pentru ca ecuația (1) să aibă soluții, trebuie ca:  $2 \sin \frac{A}{2} \leq 1$ , adică:  $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{1}{2}$ .

De aici rezultă:  $\frac{A}{2} \leq 30^\circ$ , deci:  $A \leq 60^\circ$ .

43. Fie  $\angle AOB$  un unghi drept. Să se ducă o dreaptă la distanța  $R$  de vârful  $O$ , astfel încât, dacă notăm cu  $C$  și  $D$  punctele în care ea intersectează laturile  $OA$ , respectiv  $OB$ , să avem:  $OC + OD = k$ .

Soluție. Notăm cu  $M$  proiecția punctului  $O$  pe dreapta  $CD$  și cu  $x = \widehat{COM}$ . Avem  $OM = R$ . Pentru a determina poziția dreptei  $CD$  trebuie să găsim valoarea unghiului  $x$ .

$$\text{Avem: } OC = \frac{R}{\cos x}, OD = \frac{R}{\sin x}, \text{ deci relația dată devine: } \frac{R}{\cos x} + \frac{R}{\sin x} = m,$$

adică:  $R(\sin x + \cos x) = m \sin x \cos x$ .

$$\text{Ridicînd la pătrat, deducem: } R^2(\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x) = m^2 \sin^2 x \cos^2 x,$$

$$\text{sau: } m^2 \sin^2 2x - 4R^2 \sin 2x - 4R^2 = 0.$$

$$\text{De aici rezultă: } \sin 2x = \frac{2R^2 \pm \sqrt{4R^4 + 4R^2 m^2}}{m^2}.$$

$$\text{Dar } x < 90^\circ, \text{ deci } 2x < 180^\circ, \text{ deci } \sin 2x > 0, \text{ adică: } \sin 2x = \frac{2R(R + \sqrt{R^2 + m^2})}{m^2}.$$

$$\text{Pentru ca problema să aibă soluție, trebuie ca: } 2R(R + \sqrt{R^2 + m^2}) \leq m^2$$

$$\text{sau: } \sqrt{R^2 + m^2} \leq \frac{m^2 - 2R^2}{2R}.$$

O primă condiție este:  $m^2 > 2R^2$ .

Presupunînd această condiție satisfăcută, putem ridica la pătrat inegalitatea de mai sus și deducem:  $R^2 + m^2 \leq \frac{(m^2 - 2R^2)^2}{4R^2}$ , de unde rezultă:  $m^2 \geq 8R^2$ .

Această condiție conține condiția (1). De aici deducem:  $m \geq 2\sqrt{2}R$ , care reprezintă condiția de posibilitate a problemei.

Dacă  $m = 2\sqrt{2}R$ , găsim:  $\sin 2x = 1$ , adică  $x = 45^\circ$ , deci dreapta  $CD$  este perpendiculară pe bisectoarea unghiului  $\angle AOB$ .

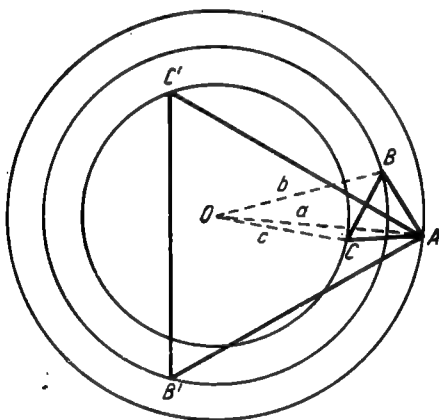


fig. VI, 3.

44. Să se determine latura unui triunghi echilateral avînd vîrfurile pe trei cercuri concenrice de raze date  $a, b, c$ .

Soluție. Fie  $O$  centrul comun al celor trei cercuri și  $ABC$  triunghiul echilateral căutat (fig. VI, 3). Notăm cu  $x$  latura triunghiului echilateral și cu  $\alpha$  unghiul  $\angle OAB$ . Aplicînd teorema cosinului în triunghiul  $OAB$  obținem:

$$b^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos \alpha.$$

Ținînd seama că  $\widehat{OAC} = 60^\circ - \alpha$ , din triunghiul  $OAC$  deducem:  $c^2 = a^2 + x^2 - 2ax \cos(60^\circ - \alpha) = a^2 + x^2 - ax\sqrt{3} \sin \alpha - ax \cos \alpha$ .

Din aceste două relații deducem:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + x^2 - b^2}{2ax}, \sin \alpha = \frac{a^2 + b^2 + x^2 - 2c^2}{2ax\sqrt{3}}.$$

Ridicînd la pătrat și adunînd aceste două relații, obținem:

$$\frac{(x^2 + a^2 - b^2)^2}{4a^2x^2} + \frac{(x^2 + a^2 + b^2 - 2c^2)^2}{12a^2x^2} = 1, \text{ sau: } x^4 - (a^2 + b^2 + c^2)x^2 + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \text{ Notînd } x^2 = y, \text{ avem: } y^2 - (a^2 + b^2 + c^2)y + a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = 0. \quad (1)$$

Realizantul acestei ecuații este:  $R = \sqrt{3(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4)}$  sau:  $R = 3(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(b + c - a)$ .

Pentru ca  $R$  să fie pozitiv este necesar și suficient ca fiecare dintre cele trei raze  $a, b, c$  să fie mai mici decît suma celorlalte două.

De asemenea, suma rădăcinilor ecuației (1) este:  $S = a^2 + b^2 + c^2 > 0$ , iar produsul:  $P = a^4 + b^4 + c^4 - a^2b^2 - a^2c^2 - b^2c^2 = \frac{1}{2} [(a^2 - b^2)^2 + (a^2 - c^2)^2 + (b^2 - c^2)^2] > 0$ .

Rezultă că, dacă condiția de mai sus este satisfăcută, ecuația (1) are rădăcini pozitive:  $y_1 > 0, y_2 > 0$ .

În acest caz, problema are două soluții, și anume:  $x_1 = \sqrt{y_1}, x_2 = \sqrt{y_2}$ .

adică: 
$$x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 \pm \sqrt{3(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}}{2}}.$$

45. Fie  $AOB$  un unghi a cărui mărime este  $2\alpha$ . Pe bisectoarea unghiului luăm un punct  $C$ , astfel încât  $OC = a$  și prin el ducem o secantă care intersectează laturile unghiului în  $D$ , respectiv  $E$ . Să se determine  $OCD = x$ , astfel încât:

$$CD \cdot CE = a^2.$$

Soluție. Notăm  $CD = m, CE = n$ . Din triunghiul  $OCD$  deducem:  $\frac{m}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin [180 - (\alpha + x)]}$ ,

adică:  $m = \frac{a \sin \alpha}{\sin (x + \alpha)}.$

Analog, din triunghiul  $OCE$  obținem:  $n = \frac{a \sin \alpha}{\sin (x - \alpha)}.$

Cu aceste valori, relația dată devine:  $\frac{a^2 \sin^2 \alpha}{\sin (x + \alpha) \sin (x - \alpha)} = a^2$ , de unde:  $\sin (x + \alpha) \sin (x - \alpha) = \sin^2 \alpha$ , sau:  $\sin^2 x \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 x = \sin^2 \alpha$ .

Înlocuind aici  $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ,  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$ , găsim:  $\sin^2 x = 2 \sin^2 \alpha$ , adică:  $\sin x = \pm \sqrt{2} \sin \alpha$ .

Pentru ca această ecuație să aibă soluție, trebuie ca:  $2 \sin^2 \alpha \leq 1$  sau, având în vedere că  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ :  $\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , deci:  $0^\circ < \alpha \leq 45^\circ$ .

Presupunând această condiție satisfăcută și notînd cu  $\beta$  cel mai mic unghi pozitiv pentru care  $\sin \beta = \sqrt{2} \sin \alpha$ , ecuația (1) are soluțiile:  $x_1 = \beta, x_2 = 180^\circ - \beta, x_3 = -\beta, x_4 = 180^\circ + \beta$ .

Pentru problemă sînt acceptabile soluțiile  $x_1$  și  $x_2$  care ne conduc la două secante simetrice față de bisectoarea  $OC$ .

46. Fie  $AB$  un segment și  $AC, BD \perp AB$ . Pe segmentul  $AB$  luăm un punct  $I$  și notăm  $AI = a, BI = b$ . Considerăm un unghi drept cu vîrful în  $I$  și care intersectează dreptele  $AC$  și  $BD$  în  $M$ , respectiv  $N$ . Să se determine poziția unghiului drept, astfel încît:  $IM + IN = k MN$ .

Soluție. Dacă notăm  $\widehat{AIM} = x$ , avem (fig. VI, 4):

$$IM = \frac{a}{\cos x}, IN = \frac{b}{\sin x},$$

$$\begin{aligned} \text{deci: } MN &= \sqrt{IM^2 + IN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 x} + \frac{b^2}{\sin^2 x}} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}{\sin x \cos x}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cu aceste valori, relația dată devine: } \frac{a}{\cos x} + \frac{b}{\sin x} &= \frac{k \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}}{\sin x \cos x}, \\ \text{sau: } a \sin x + b \cos x &= k \sqrt{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}. \end{aligned}$$

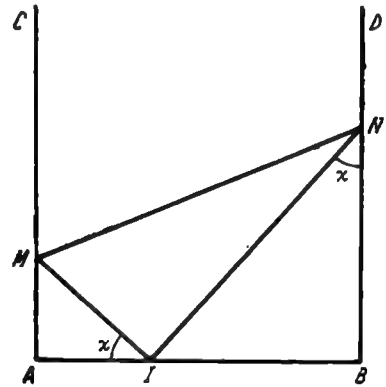


Fig. VI, 4.

Ridicând la pătrat, deducem:  $a^2(1 - k^2) \sin^2 x + 2ab \sin x \cos x + b^2(1 - k^2) \cos^2 x = 0$  sau, împărțind cu  $\cos^2 x \neq 0$ :  $a^2(1 - k^2) \tan^2 x + 2ab \tan x + b^2(1 - k^2) = 0$ . (1)

Această ecuație determină unghiul  $x$ , deci poziția unghiului  $MIN$ .

Pentru ca ecuația (1) să aibă rădăcini reale, trebuie ca:  $a^2b^2 - a^2b^2(1 - k^2)^2 \geq 0$  sau:

$$k^2(\sqrt{2} + k)(\sqrt{2} - k) \geq 0.$$

Dar  $k > 0$ , deci de aici rezultă:  $k \leq \sqrt{2}$ .

Dacă notăm cu  $S$  și  $P$  suma și produsul rădăcinilor ecuației (1) considerată ca o ecuație

$$\text{de gradul II în } \tan x, \text{ avem: } S = \frac{2b}{a(k^2 - 1)}; P = \frac{b^2}{a^2}.$$

Pentru ca rădăcinile ecuației (1) să fie acceptabile, trebuie ca ele să fie pozitive, căci

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, \text{ deci } \tan x > 0.$$

De aici rezultă:  $k > 1$ .

Deci, condiția de posibilitate a problemei este:  $1 < k \leq \sqrt{2}$ .

Pentru  $k = \sqrt{2}$ , avem:  $\tan x = \frac{b}{a}$ .

47. Se consideră un triunghi isoscel  $AOB$ , al cărui vîrf  $O$  este fix și ale cărui laturi egale  $OA = OB$  au o lungime constantă  $l$ . Prin punctul  $O$  ducem o dreaptă fixă  $Ox$  și notăm  $\angle xOA = \alpha$ ,  $\angle xOB = \beta$ . Să se arate că dacă dreapta  $AB$  variază astfel încît

$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = k, (k = \text{const.} > 0),$$

atunci ea trece printr-un punct fix situat pe dreapta  $Ox$ .

**Soluție.** Fie  $E$  și  $F$  proiecțiile punctelor  $A$ , respectiv  $B$ , pe dreapta  $Ox$  și  $C$  punctul în care dreapta  $AB$  intersectează pe  $Ox$  (fig. VI, 5). Triunghiurile  $AEC$  și  $BDC$  sînt asemenea

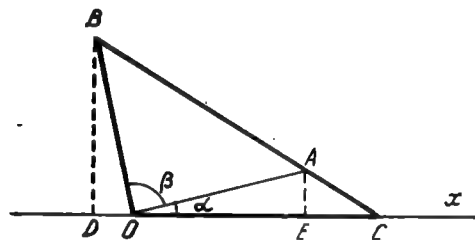


Fig. VI, 5.

$$\text{și deci: } \frac{EC}{DC} = \frac{AE}{BD} \text{ sau: } \frac{OC - OE}{OC + OD} = \frac{AE}{BD},$$

$$\text{de unde: } OC = \frac{OE \cdot BD + AE \cdot OD}{BD - AE}.$$

$$\text{Dar: } OE = l \cos \alpha, OD = l \cos \beta, AE = l \sin \alpha, BD = l \sin \beta,$$

$$\text{deci: } OC = l \frac{\sin \beta \cos \alpha - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \beta - \sin \alpha} =$$

$$= l \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \beta - \sin \alpha} =$$

$$= l \frac{2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = l \frac{\cos \frac{\beta - \alpha}{2}}{\cos \frac{\beta + \alpha}{2}} = l \frac{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}} =$$

$$= l \frac{1 + \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}}{1 - \tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2}} = l \frac{1 + k}{1 - k}.$$

Rezultă că:  $OC = \text{const.}$ , deci punctul  $O$  este fix.



48. Se consideră un cerc cu centrul în punctul  $O$  și cu raza  $R$  și două coarde  $AG$  și  $AH$  care fac cu raza  $AO$  unghiurile  $\alpha$ , respectiv  $\beta$ . Fie  $EF$  o coardă care intersectează coardele  $AG$  și  $AH$  în  $B$ , respectiv  $C$ ,  $D$  și  $M$  proiecțiile punctului  $O$  pe  $EF$

și  $AB$ . Se dă  $OD = a$  și  $\widehat{DOM} = \varphi$  și se cere să se determine lungimile laturilor și aria triunghiului  $ABC$ .

*Soluție.* Fie  $N$  proiecția lui  $O$  pe  $AC$  (fig. VI, 6).

Avem:  $AB = AM + MB$ ,  $AC = AN + NC$ .

Din triunghiurile  $AOM$  și  $AON$  deducem:

$$AM = R \cos \alpha, \quad AN = R \cos \beta.$$

Proiectând conturul  $OMBD$  pe dreapta  $OD$ , obținem:  $OD = OM \cos \varphi + MB \sin \varphi$ .

Dar  $OM = R \sin \alpha$ , deci de aici rezultă:

$$MB = \frac{a - R \sin \alpha \cos \varphi}{\sin \varphi}.$$

Analog, proiectând conturul  $ONCD$  pe dreapta  $CD$ , găsim:  $OD = ON \cos (\varphi + \beta - \alpha) + NC \sin (\varphi + \beta - \alpha)$ , de unde, având în vedere că  $ON = R \sin \beta$ :

$$NC = \frac{a - R \sin \beta \cos (\varphi + \beta - \alpha)}{\sin (\varphi + \beta - \alpha)}.$$

$$\text{Cu aceste valori obținem: } AB = R \cos \alpha + \frac{a - R \sin \alpha \cos \varphi}{\sin \varphi} = \frac{R \sin (\varphi - \alpha) + a}{\sin \varphi},$$

$$AC = R \cos \beta + \frac{a - R \sin \beta \cos (\varphi + \beta - \alpha)}{\sin (\varphi + \beta - \alpha)} = \frac{R \sin (\varphi - \alpha) + a}{\sin (\varphi + \beta - \alpha)}.$$

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $ABC$  și având în vedere că  $\widehat{ABC} = \varphi$ , găsim:

$$\frac{BC}{\sin (\beta - \alpha)} = \frac{AC}{\sin \varphi}, \text{ de unde: } BC = \frac{R \sin (\varphi - \alpha) \sin (\beta - \alpha) + a \sin (\beta - \alpha)}{\sin \varphi \sin (\varphi + \beta - \alpha)}.$$

Aria triunghiului  $ABC$  este:  $S = \frac{AB \cdot AC \sin (\beta - \alpha)}{2}$ , sau, având în vedere expresiile

$$\text{laturilor } AB \text{ și } AC: S = \frac{[R \sin (\varphi - \alpha) + a]^2 \sin (\beta - \alpha)}{2 \sin \varphi \sin (\varphi + \beta - \alpha)}.$$

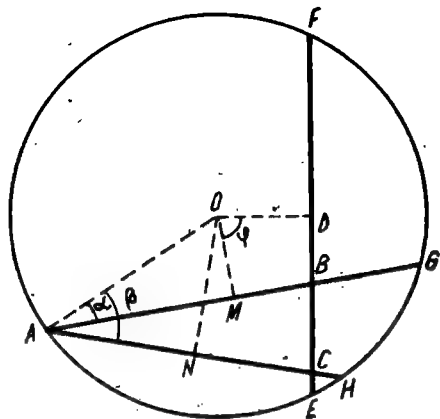


Fig. VI, 6.

49. Se consideră sfertul de cerc  $AOB$  de rază  $R$  și tangentele la el  $CA$  și  $CB$  (fig. VI, 7). Fie  $M$  un punct oarecare pe arcul  $AB$ . Notăm

$\widehat{MCB} = \alpha$ ,  $\widehat{MOB} = \varphi$ . Se cere:

1° Calculând în două moduri diferite lungimea segmentului  $MB$ , să se deducă:

$$\cos (\alpha + \varphi) = \sqrt{2} \cos (45^\circ + \alpha). \quad (1)$$

2° Să se discute ecuația (1) considerată ca o ecuație cu necunoscuta  $\varphi$ ,  $\alpha$  fiind un unghi fix ascuțit.

3° Să se determine efectiv valoarea lui  $\varphi$  dacă  $\alpha = 15^\circ$ .

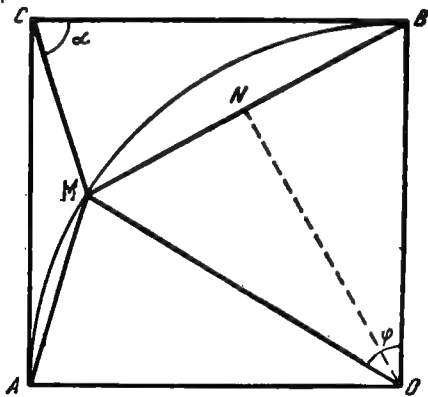


Fig. IV, 7.

*Soluție.* 1° Dacă notăm cu  $N$  mijlocul segmentului  $MB$ , din triunghiul  $ONB$  deducem:

$$NB = R \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \text{deci: } MB = 2R \sin \frac{\varphi}{2}.$$

Din triunghiul  $MBC$ , teorema sinusurilor ne dă:  $\frac{MB}{\sin \alpha} = \frac{R}{\sin \left( 180^\circ - \alpha - \frac{\varphi}{2} \right)}$ ,

$$\text{adică: } MB = \frac{R \sin \alpha}{\sin \left( \alpha + \frac{\varphi}{2} \right)}.$$

Egalând cele două valori găsite pentru  $MB$ , obținem:  $\sin \alpha = 2 \sin \left( \alpha + \frac{\varphi}{2} \right) \sin \frac{\varphi}{2}$ .

Transformând produsul de sinusuri în diferență de cosinusuri, această relație devine:  $\sin \alpha = \cos \alpha - \cos (\alpha + \varphi)$ , adică:  $\cos (\alpha + \varphi) = \cos \alpha - \sin \alpha$ .

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \cos \alpha - \sin \alpha &= \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \alpha \right) = \sqrt{2} (\cos 45^\circ \cos \alpha - \sin 45^\circ \sin \alpha) = \\ &= \sqrt{2} \cos (45^\circ + \alpha), \text{ deci: } \cos (\alpha + \varphi) = \sqrt{2} \cos (45^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

2° Avem  $0^\circ < \varphi + \alpha < 180^\circ$ , deci  $-1 < \cos (\varphi + \alpha) < 1$ . Din ecuația (1) rezultă că trebuie

$$\text{să avem: } -1 < \sqrt{2} \cos (45^\circ + \alpha) < 1$$

$$\text{sau: } -\frac{1}{\sqrt{2}} < \cos (45^\circ + \alpha) < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Această inegalitate are loc dacă:  $45^\circ < 45^\circ + \alpha < 135^\circ$ , care este totdeauna adevărată, căci  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

Deci ecuația (1) are soluții. 3° Dacă  $\alpha = 15^\circ$ , ecuația (1) devine:  $\cos (\varphi + 15^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , de unde:  $\varphi + 15^\circ = 45^\circ$ , adică:  $\varphi = 30^\circ$ .

**50.** Se consideră un semicerc de diametru  $AB = 2R$ . Prin  $A$  se duce o coardă  $AC$  a semicercului care face cu  $AB$  unghiul  $\theta$ , ar printr-un punct  $D$  de pe diametru se duce o perpendiculară pe acesta, care intersectează coarda  $AC$  în  $E$ , iar semicercul în  $F$ . Să se determine poziția punctului  $D$ , astfel încât  $DE + DF = l$ . Discuție.

*Soluție.* Ducem dreapta  $AF$  și notăm  $\widehat{BAF} = x$ . Avem:  $AD = AF \cos x$ .

Dar, din triunghiul  $ABF$  deducem:  $AF = 2R \cos x$ , deci:  $AD = 2R \cos^2 x$ . Din triunghiurile  $ADE$  și  $ADF$  găsim:  $DE = AD \operatorname{tg} \theta$ ,  $DF = AD \operatorname{tg} x$ , adică:  $DE = 2R \cos^2 x \operatorname{tg} \theta$ ,  $DF = 2R \sin x \cos x$ .

Cu aceste valori relația dată devine:  $2R \operatorname{tg} \theta \cos^2 x + 2R \sin x \cos x = l$  sau  $R \operatorname{tg} \theta (\cos 2x + 1) + R \sin 2x = l$ .

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \sin 2x &= \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \quad \cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}, \text{ deci ecuația de mai sus devine: } l \operatorname{tg}^2 x - \\ &- 2R \operatorname{tg} x + l - 2R \operatorname{tg} \theta = 0. \end{aligned}$$

Notînd  $y = \operatorname{tg} x$ , obținem ecuația de gradul doi:  $l y^2 - 2R y + l - 2R \operatorname{tg} \theta = 0$ . (1)

Pentru ca această ecuație să aibă rădăcini reale trebuie ca:  $R^2 - l(l - 2R \operatorname{tg} \theta) \geq 0$ , adică:  $l^2 - 2R \operatorname{tg} \theta \cdot l - R^2 \leq 0$ .

De aici rezultă:  $R(\operatorname{tg} \theta - \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}) \leq l \leq R(\operatorname{tg} \theta + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta})$ .

$$\text{Dar } l > 0, \text{ deci avem condiția: } 0 < l \leq R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}. \quad (2)$$

Notînd cu  $S$  și  $P$  suma și produsul rădăcinilor ecuației date, avem:

$$S = \frac{2R}{l} > 0, P = \frac{l - 2R \operatorname{tg} \theta}{l},$$

Dacă  $l < 2R \operatorname{tg} \theta$ , avem  $P < 0$ , iar dacă  $l > 2R \operatorname{tg} \theta$ , avem  $P > 0$ . Ținînd seama că

$$\text{pentru } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}: 2 \operatorname{tg} \theta < \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta},$$

rezultă că dacă  $0 < l < 2R \operatorname{tg} \theta$ , ecuația (1) are o rădăcină pozitivă și una negativă; dacă:  $2R \operatorname{tg} \theta < l \leq R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$ , ecuația (1) are două rădăcini pozitive; iar dacă:  $l = 2R \operatorname{tg} \theta$ , ecuația (1) are o rădăcină nulă și una pozitivă egală cu  $\operatorname{ctg} \theta$ .

Avînd în vedere că  $x$  este un unghi ascuțit rezultă că  $\operatorname{tg} x > 0$ , deci dacă:

$$0 < l \leq 2R \operatorname{tg} \theta,$$

problema are o soluție; dacă  $2R \operatorname{tg} \theta < l \leq R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$  problema are două soluții.

În cazul  $l = 2R \operatorname{tg} \theta$ , avem  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} \theta$ , deci  $x = \frac{\pi}{2} - \theta$ . În cazul  $l = R \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}$ , avem:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}, \text{ sau: } \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right), \text{ adică: } x = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}.$$

**51.** Se consideră un cerc cu centrul în  $O$  și raza  $R$ . Printr-un punct  $M$  situat în exteriorul cercului ducem o secantă care intersectează cercul în  $B$  și  $C$ . În aceste puncte se duc tangentele la cerc care se intersectează în  $A$ . Să se determine poziția secantei  $MBC$ , astfel încît una dintre înălțimile triunghiului  $ABC$  să aibă o lungime dată.

*Soluție.* Fie  $MD$  tangenta dusă din  $M$  la cerc și  $I$  punctul în care  $OA$  intersectează pe  $BC$  (fig. VI, 8). Notăm  $x = \widehat{OMB}$ ,  $y = \widehat{OAB}$ ,  $\alpha = \widehat{OMD}$ . Pentru a determina poziția secantei  $MBC$  trebuie să determinăm unghiul  $x$ .

Avem:  $OA \perp BC$ ,  $OC \perp AC$ ,  $OB \perp AB$ , deci:

$$\widehat{OCI} = \widehat{OBI} = y.$$

Scotînd valoarea segmentului  $OI$  din triunghiurile  $OMI$  și  $OBI$ , obținem:  $OI = OM \sin x = R \sin y$ .

Dar, din triunghiul  $ODM$  deducem:

$$OM = \frac{R}{\sin \alpha},$$

deci egalitatea de mai sus devine:

$$\frac{R \sin x}{\sin \alpha} = R \sin y, \text{ de unde: } \sin x = \sin \alpha \sin y. \quad (1)$$

Să presupunem că înălțimea  $AI$  are o lungime dată  $h$ . Avem:  $AI = OA - OI$ , deci:  $h = \frac{R}{\sin y} - R \sin y$ .

Înlocuind aici pe  $\sin y$  cu valoarea lui dată de (1) obținem:  $R \sin^2 x + h \sin \alpha \sin x - R \sin^2 \alpha = 0$

de unde:  $\sin x = \frac{\sin \alpha}{2R} (-h \pm \sqrt{h^2 + 4R^2})$ .

Ținînd seama că  $\sin x > 0$ , rezultă:  $\sin x = \frac{\sin \alpha}{2R} (\sqrt{h^2 + 4R^2} - h)$ .

Dacă înălțimea  $CN$  (sau  $BP = CN$ ) are o valoare dată  $h'$ , atunci:  $h' = BC \cos y$ .

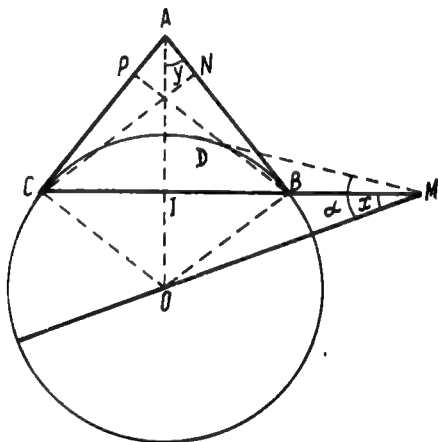


Fig. VI, 8.

Dar:  $BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos(180^\circ - 2y)$ , adică:

$$BC^2 = 2R^2 + 2R^2 \cos 2y = 2R^2 + 2R^2 (2 \cos^2 y - 1) = 4R^2 \cos^2 y, \text{ deci: } BC = 2R \cos y.$$

Rezultă că:  $h' = 2R \cos^2 y$  sau, ținând seama de (1):  $h' = 2R \left( 1 - \frac{\sin^2 x}{\sin^2 \alpha} \right)$ .

$$\text{De aici deducem: } \sin^2 x = \frac{2R - h'}{2R} \sin^2 \alpha, \text{ deci: } \sin x = \sqrt{\frac{2R - h'}{2R}} \sin \alpha.$$

**52.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex ale cărui unghiuri le notăm cu  $A, B, C, D$ . Atunci avem relațiile:

$$1^\circ \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2},$$

$$2^\circ \sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}.$$

*Soluție.*  $1^\circ$  Având în vedere că  $D = 2\pi - (A + B + C)$ , rezultă că:  $\cos D = \cos(A + B + C)$  și membrul întâi al relației devine:  $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C)$ .

$$\begin{aligned} \text{Transformând în produs această sumă rezultă: } \cos A + \cos B + \cos C + \cos(A + B + C) &= 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B+2C}{2} \cos \frac{A+B}{2} = 2 \cos \frac{A+B}{2} \left( \cos \frac{A-B}{2} + \right. \\ &\left. + \cos \frac{A+B+2C}{2} \right) = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cdot 2 \cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{B+C}{2} = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{C+A}{2}. \end{aligned}$$

$2^\circ$  Transformând în produse sumele formate din primul și al treilea termen al membrului întâi, respectiv al doilea și al patrulea, obținem:

$$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 2 \sin \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} - 2 \sin \frac{B+D}{2} \cos \frac{B-D}{2}.$$

Dar  $\frac{B+D}{2} = 180^\circ - \frac{A+C}{2}$ , deci  $\sin \frac{B+D}{2} \sin \frac{A+C}{2}$  și suma de mai sus devine:

$$\begin{aligned} \sin A - \sin B + \sin C - \sin D &= 2 \sin \frac{A+C}{2} \left( \cos \frac{A-C}{2} - \cos \frac{B-D}{2} \right) = \\ &= 2 \sin \frac{A+C}{2} \cdot 2 \sin \frac{A+B-C-D}{4} \sin \frac{B+C-A-D}{4}. \end{aligned}$$

Având în vedere că  $C + D = 360^\circ - (A + B)$  și că  $A + D = 360^\circ - (B + C)$ , rezultă că  $\sin \frac{A+B-C-D}{4} = -\cos \frac{A+B}{2}$  și  $\sin \frac{B+C-A-D}{4} = -\cos \frac{B+C}{2}$  și deci

$$\sin A - \sin B + \sin C - \sin D = 4 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{C+A}{2}.$$

**53.** Fie  $ABCD$  un patrulater convex. Notăm  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $AC = f$ ,  $BD = g$ . Dacă  $O$  este punctul de intersecție al diagonalelor și  $\widehat{AOD} = \varphi$ , atunci:  $\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2fg}$ .

*Soluție.* Notând  $OA = x$ ,  $OB = y$  și aplicând teorema cosinusului în triunghiurile  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  obținem:

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(180^\circ - \varphi),$$

$$b^2 = (f - x)^2 + y^2 - 2(f - x)y \cos \varphi,$$

$$c^2 = (f - x)^2 + (g - y)^2 - 2(f - x)(g - y) \cos(180^\circ - \varphi),$$

$$d^2 = x^2 + (g - y)^2 - 2x(g - y) \cos \varphi.$$

Dar  $\cos (180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$ , deci:

$$\begin{aligned} a^2 + c^2 &= x^2 + y^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2 + 2(fg - fy - gx + 2xy) \cos \varphi, \\ b^2 + d^2 &= x^2 + y^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2 - 2(fy + gx - 2xy) \cos \varphi. \end{aligned}$$

De aici rezultă:  $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 2fg \cos \varphi$ , adică:  $\cos \varphi = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2fg}$ .

54. Se consideră un patrulater inscriptibil  $ABCD$ , ale cărui laturi sînt  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$  și se cere să se determine unghiurile, aria, diagonalele și raza cercului circumscris.

Soluție. Din triunghiul  $ABD$  avem:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A, \text{ iar din triunghiul } CBD: BD^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C. \quad (1)$$

$$\text{Dar } C = 180^\circ - A, \text{ deci } \cos C = -\cos A \text{ și din aceste două relații deducem: } a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A, \text{ de unde: } \cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}. \quad (2)$$

Pentru a obține o formulă calculabilă prin logaritmi să calculăm funcțiile trigonometrice

$$\begin{aligned} \text{ale unghiului } \frac{A}{2}. \text{ Avem: } 2 \cos^2 \frac{A}{2} &= 1 + \cos A = 1 + \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{a^2 + d^2 + 2ad - (b^2 + c^2 - 2bc)}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d)^2 - (b - c)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(a + d + b - c)(a + d - b + c)}{2(ad + bc)}, \\ 2 \sin^2 \frac{A}{2} &= 1 - \cos A = 1 - \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{b^2 + c^2 + 2bc - (a^2 + d^2 - 2ad)}{2(ad + bc)} = \\ &= \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2(ad + bc)} = \frac{(b + c + a - d)(b + c - a + d)}{2(ad + bc)}. \text{ Notînd: } a + b + c + d = 2p, \end{aligned}$$

$$\text{avem: } b + c + d - a = 2p - 2a = 2(p - a), \quad a + b + d - c = 2p - 2c = 2(p - c), \\ a + c + d - b = 2p - 2b = 2(p - b), \quad a + b + c - d = 2p - 2d = 2(p - d).$$

$$\text{Cu această notație obținem: } 2 \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p - b)(p - c)}{ad + bc}, \quad 2 \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{2(p - a)(p - d)}{ad + bc},$$

$$\text{adică: } \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{ad + bc}}, \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{ad + bc}}. \quad (3)$$

$$\text{De aici deducem: } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - d)}{(p - b)(p - c)}}.$$

$$\text{Analog, găsim: } \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{(p - c)(p - d)}}.$$

Din aceste formule deducem unghiurile  $A$  și  $B$ , iar din  $C = 180^\circ - A$ ,  $D = 180^\circ - B$  deducem unghiurile  $C$  și  $D$ .

Pentru ca problema să aibă soluție, trebuie ca:  $(p - a)(p - b)(p - c)(p - d) > 0$ , adică  $(b + c + d - a)(a + c + d - b)(a + b + d - c)(a + b + c - d) > 0$ .

Presupunînd că  $a$  este cea mai mare dintre laturi rezultă că  $a + c + d - b > 0$ ,  $a + b + d - c > 0$ ,  $a + b + c - d > 0$ , deci condiția problemei se scrie:  $a < b + c + d$ .

Deci, pentru ca problema să aibă soluții, trebuie ca cea mai mare dintre laturile patrulaterului să fie mai mică decît suma celorlalte laturi.

Ținînd seama că aria  $S$  a patrulaterului  $ABCD$  este suma ariilor triunghiurilor  $ABD$  și  $CBD$ , rezultă că:

$$S = \frac{ad \sin A}{2} + \frac{bc \sin C}{2},$$

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \sin C &= \sin (180^\circ - A) = \sin A, \text{ deci: } S = \frac{(ad + bc) \sin A}{2}. \text{ Avem: } \sin A = \\ &= 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \text{ și, ținînd seama de formulele (3), obținem: } \sin A = \frac{2 \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}{ad + bc} \quad (4) \\ \text{și deci: } S &= \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}. \end{aligned}$$

Ținând seama în (1) de (2), rezultă:

$$BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} = \frac{a^2bc + d^2bc + b^2ad + c^2ad}{ad + bc} =$$

$$= \frac{ab(ac + bd) + dc(ac + bd)}{ad + bc} = \frac{(ab + dc)(ac + bd)}{ad + bc}.$$

Analog, găsim:  $AC^2 = \frac{(ab + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$

Având în vedere că cercul circumscris patrulaterului  $ABCD$  este în același timp și cercul circumscris triunghiului  $ABD$ , aplicând teorema sinusurilor în acest triunghi rezultă:

$$2R = \frac{BD}{\sin A}.$$

Înlocuind aici valoarea lui  $BD$  și ținând seama de formula (4), rezultă:

$$R = \frac{\sqrt{(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc)}}{4\sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}}.$$

55. Se consideră un trapez  $ABCD$  în care se dau bazele  $AD = m$ ,  $BC = n$ , ( $m < n$ ), înălțimea  $AH = h$  și unghiul  $\alpha$  făcut de prelungirile laturilor neparalele  $AB$  și  $CD$ . Să se calculeze lungimile laturilor neparalele. Aplicație:  $m = 2$ ,  $n = 5$ ,  $k = \sqrt{3}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

*Soluție.* Fie  $E$  punctul în care paralela dusă prin  $A$  la latura  $CD$  întâlnește latura  $BC$  (fig. VI, 9). În triunghiul  $ABE$  cunoaștem latura  $BE = n - m$ , înălțimea  $AH = h$  și unghiul  $\widehat{BAE} = \alpha$ . Dacă notăm  $AB = b$ ,  $AE = CD = c$ ,  $n - m = a$  și aria triunghiului cu  $S$ , avem:

$$S = \frac{ah}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}, \text{ adică } bc = \frac{ah}{\sin \alpha}.$$

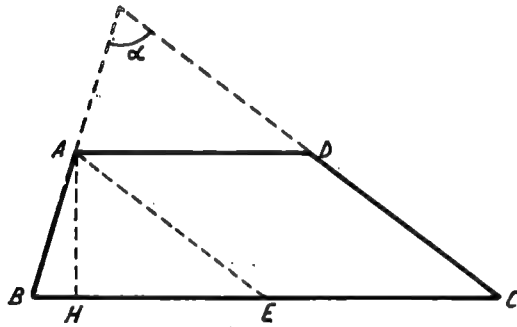


Fig. VI, 9.

De asemenea, teorema cosinusului se scrie:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha = (b + c)^2 - 2bc(1 + \cos \alpha)$ , de unde:  $(b + c)^2 = a^2 + 2bc(1 + \cos \alpha)$  sau, având în vedere valoarea produsului  $bc$ ;  $(b + c)^2 = a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

Analog, găsim:  $(b - c)^2 = a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$

De aici deducem:  $b + c = \sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}},$

$$b - c = \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}},$$

adică:  $b = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2}, \quad c = \frac{\sqrt{a^2 + 2ah \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} - \sqrt{a^2 - 2ah \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}}{2}.$

În cazul aplicației numerice date avem:  $a = 3$ ,  $h = \sqrt{3}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ , deci:  $b = 2\sqrt{3}$ ,  $c = \sqrt{3}$ .

56. Să se calculeze înălțimea  $h$  a unui trapez în funcție de bazele  $a$  și  $b$  și diagonalele  $d_1$  și  $d_2$ .

*Soluție.* Fie  $ABCD$  un trapez ale cărui baze sînt  $AB = a$ ,  $CD = b$  și diagonalele  $AD = d_1$ ,  $BC = d_2$ . Dacă notăm cu  $\varphi$  unghiul dintre diagonale, scriind aria trapezului ca fiind suma ariilor triunghiurilor  $ABC$  și  $BCD$ , obținem:  $(a + b)h = d_1 d_2 \sin \varphi$ , de unde:  $h = \frac{d_1 d_2 \sin \varphi}{a + b}. \quad (1)$

Din triunghiurile asemenea  $AMB$  și  $CMD$ , deducem:  $\frac{MA}{MD} = \frac{MB}{MC} = \frac{a}{b}$ .

De aici rezultă:  $MA = \frac{ad_1}{a+b}$ ,  $MB = \frac{ad_2}{a+b}$ .

Scriind teorema cosinusului în triunghiul  $AMB$ , rezultă:  $a^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cos \varphi$ .

Înlocuind aici valorile segmentelor  $MA$  și  $MB$ , obținem:  $\cos \varphi = \frac{d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2}{2d_1d_2}$ ,

$$\begin{aligned} \text{de unde: } \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \left[ \frac{d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2}{2d_1d_2} \right]^2} = \\ &= \frac{1}{d_1d_2} \sqrt{4d_1^2d_2^2 - [d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2]^2} = \\ &= \frac{1}{d_1d_2} \sqrt{[2d_1d_2 + d_1^2 + d_2^2 - (a+b)^2][2d_1d_2 - d_1^2 - d_2^2 + (a+b)^2]} = \\ &= \frac{1}{d_1d_2} \sqrt{[(d_1 + d_2)^2 - (a+b)^2][(a+b)^2 - (d_1 - d_2)^2]} = \\ &= \frac{1}{d_1d_2} \sqrt{(a+b+d_1+d_2)(a+b-d_1+d_2)(a+b+d_1-d_2)(d_1+d_2-a-b)}. \end{aligned}$$

57. Să se calculeze unghiurile unui patrulater convex ale cărui laturi sînt  $a, b, c, d$ , și aria  $S = m^2$ .

*Soluție.* Fie patrulaterul  $ABCD$  ale cărui laturi sînt  $AB = a, BC = b, CD = c, DA = d$ . Din triunghiurile  $ABD$  și  $BCD$ , aplicînd teorema cosinusului, deducem:  $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$ , de unde:  $ad \cos A - bc \cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2}$  sau, notînd  $a^2 + d^2 - b^2 - c^2 = 2k^2$ ,  $ad \cos A - bc \cos C = k^2$  și scriînd că aria patrulaterului este (1) suma ariilor triunghiurilor  $ABD$  și  $BCD$ , obținem:  $ad \sin A + bc \sin C = 2m^2$ . Din (1) și (2) rezultă:  $bc \sin C = 2m^2 - ad \sin A$ ,  $bc \cos C = ad \cos A - k^2$ .

Ridicînd la pătrat și adunînd, deducem:  $b^2c^2 = 4m^2 + a^2d^2 + k^4 - 4adm^2 \sin A - 2adk^2 \cos A$ , adică:  $2m^2 \sin A + k^2 \cos A = \frac{k^4 + 4m^2 + a^2d^2 - b^2c^2}{2ad}$ . (3)

Din această ecuație deducem valoarea unghiului  $A$ . Înlocuind aici pe  $\sin A$  și  $\cos A$  în funcție de  $\tan \frac{A}{2}$ , obținem:  $[(k^2 + ad)^2 + 4m^2 - b^2c^2] \tan^2 \frac{A}{2} - 8m^2ad \tan \frac{A}{2} + (k^2 - ad)^2 + 4m^2 - b^2c^2 = 0$ .

Condiția de realitate a rădăcinilor este:  $16m^4a^2d^2 - [(k^2 + ad)^2 - b^2c^2 + 4m^2][(k^2 - ad)^2 - b^2c^2 + 4m^2] \geq 0$ .

În mod analog obținem celelalte unghiuri ale patrulaterului.

58. Într-un patrulater convex se dau trei laturi și cele două unghiuri determinate de ele și se cere să se calculeze a patra latură.

*Soluție.* Fie  $BCDE$  un patrulater în care se dau laturile  $BC = a, CD = b, EB = c$  și unghiurile  $B$  și  $C$ . Prolungim laturile  $CD$  și  $BE$  pînă în punctul  $A$  și notăm  $DE = d, AE = x, AD = y$ . Din triunghiul  $ABC$  rezultă  $A = 180^\circ - (B + C)$ .

Aplicînd teorema sinusurilor în triunghiul  $ABC$ , avem:

$$\begin{aligned} \frac{c+x}{\sin C} &= \frac{b+y}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}, \text{ de unde:} \\ x &= \frac{a \sin C}{\sin A} - c, y = \frac{a \sin B}{\sin A} - b. \end{aligned}$$

În triunghiul  $ADE$ , teorema cosinusului ne dă:  $d^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$ .

Înlocuind aici pe  $x$  și  $y$  cu valorile lor, obținem:  $d^2 = \left( \frac{a \sin C}{\sin A} - c \right)^2 + \left( \frac{a \sin B}{\sin A} - b \right)^2 - 2 \left( \frac{a \sin C}{\sin A} - c \right) \left( \frac{a \sin B}{\sin A} - b \right) \cos A$  sau:  $d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + \frac{a^2}{\sin^2 A} (\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A) - \frac{2a}{\sin A} [c (\sin C - \sin B \cos A) + b (\sin B - \sin C \cos A)]$ .

Avem:  $\sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos(B + C) = \sin^2 B + \sin^2 C + 2 \sin B \sin C (\cos B \cos C - \sin B \sin C) = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin^2 B \sin^2 C + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = \sin^2 B (1 - \sin^2 C) + \sin^2 C (1 - \sin^2 B) + 2 \sin B \cos B \sin C \cos C = \sin^2 B \cos^2 C + \sin^2 C \cos^2 B + 2 \sin B \sin C \cos B \cos C = (\sin B \cos C + \sin C \cos B)^2 = \sin^2 (B + C) = \sin^2 A$ .

De asemenea, avem:  $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$ , deci:  $\sin C - \sin B \cos A = \sin A \cos B$ .

Analog:  $\sin B - \sin C \cos A = \sin A \cos C$ .

Cu aceste valori, obținem:  $d^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A + \frac{a^2}{\sin^2 A} \cdot \sin^2 A - \frac{2a}{\sin A} (c \sin A \cos B + b \sin A \cos C) = a^2 + b^2 + c^2 - 2bc \cos A - 2ac \cos B - 2ab \cos C$ .

59. În triunghiul  $ABC$  se notează cu  $A_1, B_1, C_1$  picioarele înălțimilor și se cere să se determine raportul dintre aria triunghiului  $A_1B_1C_1$  și aria triunghiului  $ABC$ , în funcție de unghiurile triunghiului  $ABC$ .

*Soluție.* Avem de considerat două cazuri după cum triunghiul  $ABC$  are toate unghiurile ascuțite sau are un unghi obtuz.

În cazul întâi avem (fig. VI, 10):

$$S = S_{A_1B_1C_1} + S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}. \quad (1)$$

Dar:  $S_{B_1AC_1} = \frac{AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin A}{2}$  și, având în vedere că:  $AB_1 = AB \cos A$ ,  $AC_1 = AC \cos A$ ,

rezultă:  $S_{B_1AC_1} = \frac{AB \cdot AC \sin A}{2} \cos^2 A = S \cos^2 A$ .

Analog:  $S_{C_1BA_1} = S \cos^2 B$ ,  $S_{A_1CB_1} = S \cos^2 C$ .

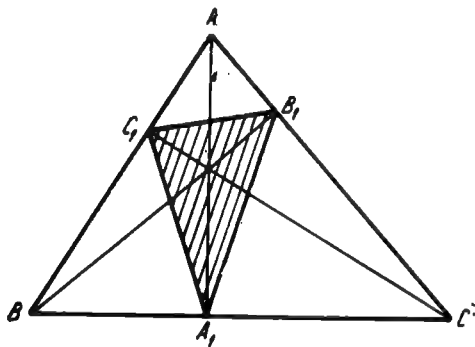


Fig. VI, 10.

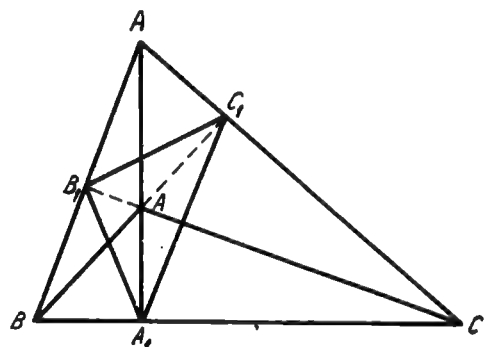


Fig. VI, 11.

Cu aceste valori relația (1) devine:  $S = S_{A_1B_1C_1} + S(\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C)$ , adică  $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$ .

În cazul al doilea avem (fig. VI, 11):  $S + S_{A_1B_1C_1} = S_{B_1AC_1} + S_{C_1BA_1} + S_{A_1CB_1}$ , de unde deducem:  $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C - 1$ .



60. Să se determine unghiurile unui triunghi dreptunghic, știind că raportul dintre raza cercului circumscris și raza cercului înscris este  $\frac{5}{4}$ .

*Soluție.* Dacă notăm cu  $R$  raza cercului circumscris triunghiului  $ABC$ , avem (fig. VI, 12):  $BC = 2R$ .

De asemenea, notînd cu  $r$  raza cercului înscris triunghiului și cu  $D$  punctul de contact al ipotenuzei  $BC$  cu cercul înscris, avem:  $BD = r \operatorname{ctg} \frac{B}{2}$ ,  $CD = r \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$ , deci:

$$BC = r \left( \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \right).$$

Avînd în vedere valoarea de mai sus a lui  $BC$ , deducem:  $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{5}{2}$ .

Dar  $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{B}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{B}{2}}$ , deci ob-

ținem ecuația:  $2 \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} - 5 \operatorname{tg} \frac{B}{2} + 2 = 0$ .

De aici rezultă:  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = 2$ .

Dar  $\frac{B}{2} < 45^\circ$ , deci  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} < 1$ . Rezultă că

singura soluție acceptabilă este:  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2}$ , de unde:  $B = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} = 53^\circ 7' 48''$  și deci:  $C = 36^\circ 52' 12''$ .

61. Să se determine aria părții comune la două cercuri secante de raze  $R_1$  și  $R_2$  știind că distanța dintre centre este  $d$ .

*Soluție.* Fie  $O_1$  și  $O_2$  centrele celor două cercuri și  $A$  și  $B$  punctele lor de intersecție (fig. VI, 13). Notăm:  $\alpha = \widehat{AO_1O_2} = \widehat{BO_1O_2}$ ,  $\beta = \widehat{AO_2O_1} = \widehat{BO_2O_1}$ ,  $\alpha$  și  $\beta$  fiind măsurate în radiani.

Cu această notație avem: aria sector.  $O_1AB = R_1^2 \alpha$ , aria sector.  $O_2AB = R_2^2 \beta$ .

De asemenea, avem: aria  $O_1AO_2B =$   
 $= 2 \text{ aria } O_1O_2A = 2 \frac{R_1 d \sin \alpha}{2} = R_1 d \sin \alpha$ .

Deci, dacă notăm cu  $S$  aria căutată, rezultă:  
 $S = R_1^2 \alpha + R_2^2 \beta - R_1 d \sin \alpha$ . (1)

Din triunghiul  $O_1O_2A$  deducem:

$$\cos \alpha = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2R_1 d}, \quad \cos \beta = \frac{d^2 + R_2^2 - R_1^2}{2R_2 d},$$

de unde rezultă:  $\sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}{4R_1^2 d^2}}$ .

$$\begin{aligned} \text{Deci: } S &= R_1^2 \arccos \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2R_1 d} + R_2^2 \arccos \frac{d^2 - R_1^2 + R_2^2}{2R_2 d} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \sqrt{4R_1^2 d^2 - (d^2 + R_1^2 - R_2^2)^2}. \end{aligned}$$

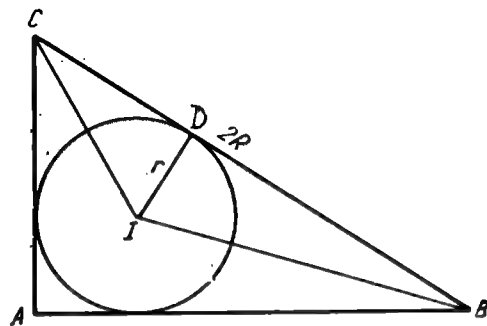


Fig. VI, 12.

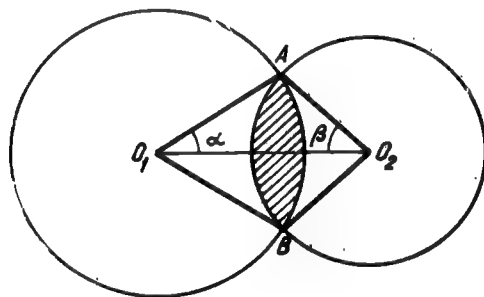
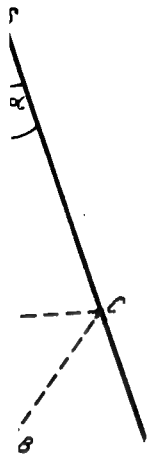


Fig. VI, 13.

Se dau cele trei fețe ale unui unghi triedru, să se calculeze unghiul diedru

Se consideră triedrul  $SABC$  ( $AB \perp SA$ ,  $AC \perp SA$ ) ale căru fețe sînt determinate de  $\alpha, \beta, \gamma$ , și  $SABC$  diedrul pe care vrem să-l măsurăm prin unghiul lui plan  $\widehat{BAC}$



Aplicînd teorema cosinusului în triunghiul  $SBC$ , găsim:  
 $BC^2 = SB^2 + SC^2 - 2SB \cdot SC \cos \alpha$ , iar în triunghiul  $ABC$ :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A.$$

Egalînd cele două valori ale lui  $BC^2$ , obținem:

$$SB^2 - AB^2 + SC^2 - AC^2 + 2AB \cdot AC \cos A - 2SB \cdot SC \cos \alpha = 0.$$

Dar din triunghiurile dreptunghice  $SAB$  și  $SAC$  avem:

$$SB^2 - AB^2 = SA^2, \quad SC^2 - AC^2 = SA^2,$$

deci relația de mai sus devine:

$$SA^2 + AB \cdot AC \cos A - SB \cdot SC \cos \alpha = 0.$$

Din aceleași triunghiuri dreptunghice deducem:

$$AB = SA \operatorname{tg} \gamma, \quad AC = SA \operatorname{tg} \beta, \quad SB = \frac{SA}{\cos \gamma}, \quad SC = \frac{SA}{\cos \beta}.$$

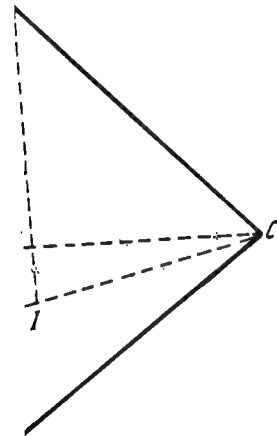
$$\text{Cu aceste valori rezultă: } \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma \cos A = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} - 1,$$

VI, 14.

$$\text{adică: } \cos A = \frac{\cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

găsi o formulă calculabilă prin logaritmi, să notăm  $\alpha + \beta + \gamma = 2p$  și să calculăm:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos A}{1 + \cos A} &= \sqrt{\frac{\sin \beta \sin \gamma - \cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha - \cos \beta \cos \gamma}} = \sqrt{\frac{\cos (\beta - \gamma) - \cos \alpha}{\cos \alpha - \cos (\beta + \gamma)}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}}}. \end{aligned}$$



$$\text{Dar: } \alpha + \beta + \gamma = 2p, \quad \alpha + \beta - \gamma = 2(p - \alpha), \quad \alpha - \beta + \gamma = 2(p - \beta), \quad \alpha + \beta - \gamma = 2(p - \gamma),$$

$$\text{deci: } \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin (p - \beta) \sin (p - \gamma)}{\sin p \sin (p - \alpha)}}.$$

63. Se consideră un tetraedru regulat și se cere să se determine unghiul lui diedru și unghiul făcut de o muchie laterală cu baza.

Soluție.

Fie tetraedrul  $SABC$  de latură  $a$ . Notăm cu  $I$  proiecția punctului  $S$  pe planul  $ABC$  și cu  $D$  proiecția lui  $S$  pe  $AB$  (fig. VI, 15). Unghiul plan al diedrului  $SABC$  este  $\widehat{SDC} = \alpha$ .

Fig. VI, 15.

$$\text{Avem: } \cos \alpha = \frac{DI}{DS}.$$

$$= \frac{DC}{3} = \frac{a \cos 30^\circ}{3} = \frac{a \sqrt{3}}{6} \text{ și: } DS = a \cos 30^\circ = \frac{a \sqrt{3}}{2}.$$

Deci:  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .

Logăritmînd, găsim:  $\lg \cos \alpha = \operatorname{colg} 3 = \overline{1,52288}$ , de unde:  $\alpha = 70^\circ 31' 44''$ .

Unghiul dintre o muchie laterală și bază este  $\widehat{SCI} = \beta$ . Avem:  $\sin \beta = \frac{SI}{SC}$ .

Dar:  $SI = \sqrt{a^2 - IC^2}$ , iar:  $IC = \frac{2CD}{3} = \frac{2a \cos 30^\circ}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ , deci:  $SI = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ .

Rezultă că:  $\sin \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ .

Logăritmînd, obținem:  $\lg \sin \beta = \frac{1}{2} \lg 6 + \operatorname{colg} 3 = \frac{1}{2} \cdot 0,77815 + \overline{1,52288} = \overline{1,91195}$ ,  
deci:  $\beta = 54^\circ 44' 6''$ .

64. Se consideră un paralelogram  $ABCD$  și fie  $M$  un punct oarecare nesituat în planul paralelogramului. Să se demonstreze că diferența dintre suma pătratelor distanțelor de la  $M$  la două vîrfuri opuse și suma pătratelor distanțelor la celelalte două vîrfuri este constantă.

Soluție. Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului și  $\alpha = \widehat{AOM}$ . Din triunghiurile  $MAO$  și  $MCO$  deducem:  $MA^2 = MO^2 + AO^2 - 2MO \cdot AO \cos \alpha$ ,

$$MC^2 = MO^2 + CO^2 - 2MO \cdot CO \cos (180^\circ - \alpha),$$

sau, ținînd seama că  $CO = AO$  și  $\cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ;  $MC^2 = MO^2 + AO^2 + 2MO \cdot AO \cos \alpha$ .

De aici rezultă:  $MA^2 + MC^2 = 2MO^2 + 2AO^2$ .

Analog, obținem:  $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + 2BO^2$ , deci:

$$(MA^2 + MC^2) - (MB^2 + MD^2) = 2(AO^2 - BO^2) = \text{const.}$$

65. Se consideră în spațiu patru puncte

$A, B, C, D$ , astfel încît:  $\widehat{ABC} = \widehat{BCD} = \widehat{CDA} = \widehat{DAB} = \alpha$  și  $AB = BC = CD = DA = a$

și se cere să se determine unghiul diedru  $CABD$  și volumul tetraedrului  $ABCD$ .

Soluție. Fie  $E$  proiecția punctului  $C$  pe dreapta  $AB$  și  $F$  punctul în care perpendiculara dusă în  $E$  pe  $AB$  intersectează dreapta  $AD$  (fig. VI, 16). Unghiul plan al diedrului  $CABD$  este  $\widehat{CEF} = \varphi$ . Din triunghiul  $CEF$  deducem:  $CF^2 = CE^2 + EF^2 - 2CE \cdot EF \cos \varphi$ . În triunghiul  $ACD$  avem  $AD = CD$ , deci  $\widehat{CAD} = \widehat{ACD} = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ .

Din triunghiul  $AFC$  obținem:  $CF^2 = AC^2 + AF^2 - 2AC \cdot AF \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Egalînd cele două expresii ale lui  $CF^2$  gă-

$$\text{sim: } CE^2 + EF^2 - 2CE \cdot EF \cos \varphi = AC^2 + AF^2 - 2AC \cdot AF \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$\text{de unde: } \cos \varphi = \frac{CE^2 - AC^2 + EF^2 - AF^2 + 2AC \cdot AF \sin \frac{\alpha}{2}}{2CE \cdot EF}.$$

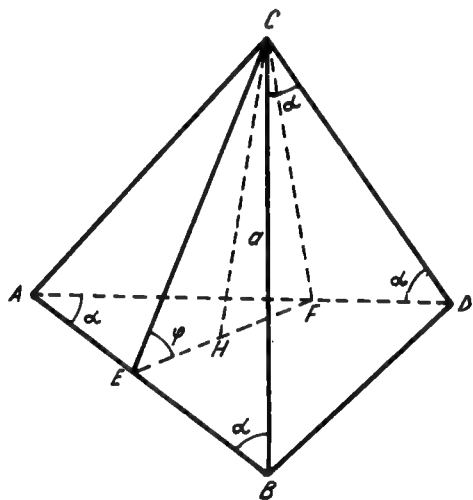


Fig. VI, 16.

Dar din triunghiurile dreptunghice  $AEC$  și  $AEF$  deducem:  $AC^2 - CE^2 = AE^2$ ,  $AF^2 - EF^2 = AE^2$ , deci:  $\cos \varphi = \frac{AC \cdot AF \sin \frac{\alpha}{2} - AE^2}{CE \cdot EF}$ .

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $ACD$ , obținem:  $\frac{AC}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}$ ,  
deci:  $AC = 2a \sin \frac{\alpha}{2}$ .

Avem:  $BE = a \cos \alpha$ , deci:  $AE = a - a \cos \alpha = a(1 - \cos \alpha) = 2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .

Din triunghiul dreptunghic  $AEF$  găsim:

$$AF = \frac{AE}{\cos \alpha} = \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}, \quad EF = AE \operatorname{tg} \alpha = 2a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha.$$

Din triunghiul dreptunghic  $CEB$  avem:  $CE = a \sin \alpha$ .

Cu aceste valori obținem:

$$\cos \varphi = \frac{\frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \cdot \frac{2a \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} - 4a^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2}}{a \sin \alpha \cdot 2a \sin^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \alpha} = \frac{4a^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} (1 - \cos \alpha)}{2a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Fie  $H$  proiecția punctului  $C$  pe dreapta  $EF$ . Din reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare rezultă că  $CH$  este perpendiculară pe planul  $ABD$ . Volumul tetraedrului este deci:

$$V = \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot CH.$$

Dar:  $S_{ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$  și:  $CH = CE \sin \varphi = a \sin \alpha \sin \varphi$ ,  
deci:  $V = \frac{a^3 \sin^3 \alpha \sin \varphi}{6}$ .

$$\begin{aligned} \text{Dar: } \sin \varphi &= \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2}}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{\left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right) \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{deci: } V = \frac{a^3 \sin^2 \alpha \cdot \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}}{6} = \\ &= \frac{4a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}{6 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \text{adică: } V = \frac{2a^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}{3}. \end{aligned}$$

În cazul  $\alpha = 60^\circ$ , deci în cazul unui tetraedru regulat, avem:  $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$ .

66. Să se determine volumul unui paralelipiped oblic în funcție de lungimile muchiilor și unghiurile dintre ele.

Soluție. Fie paralelipipedul  $ABCD A' B' C' D'$  (fig. VI, 17), în care:  $AA' = a$ ,  $AB = b$ ,  $AC = c$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ ,  $\widehat{A'AC} = \beta$ ,  $\widehat{A'AB} = \gamma$ .

Notind cu  $H$  proiecția lui  $A'$  pe planul  $ABCD$ , avem:  $V = S_{ABCD} \cdot A'H$ .

Dar:  $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = bc \sin \alpha$ ,

deci:  $V = bc \sin \alpha \cdot A'H$ .

Dacă notăm cu  $M$  și  $N$  proiecțiile lui  $A'$  pe laturile  $AB$ , respectiv  $AC$ , din reciproca întâi a teoremei celor trei perpendiculare deducem:  $HM \perp AB$ ,  $HN \perp AC$ .

Rezultă că patrulaterul  $AMHN$  este inscriptibil, fiind înscris în cercul de diametru  $AH$ .

Din triunghiul dreptunghic  $AHA'$ , obținem:  $A'H^2 = AA'^2 - AH^2 = a^2 - AH^2$ .

Dar triunghiul  $AMN$  este înscris în același cerc ca și patrulaterul  $AMHN$ , deci teorema sinusurilor

$$\text{ne dă: } \frac{MN}{\sin \alpha} = AH.$$

Cu această valoare rezultă:  $A'H^2 = a^2 - \frac{MN^2}{\sin^2 \alpha}$ .

Aplicind teorema cosinusului în triunghiul  $AMN$  deducem:  $MN^2 = AM^2 + AN^2 - 2AM \cdot AN \cos \alpha$ .

Dar, din triunghiurile  $AMA'$  și  $ANA'$  rezultă:  $AM = a \cos \gamma$ ,  $AN = a \cos \beta$ , deci:

$$MN^2 = a^2(\cos^2 \beta + \cos^2 \gamma - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma).$$

Cu această valoare, obținem:  $A'H^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma) = \frac{a^2}{\sin^2 \alpha} (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma)$ .

Rezultă:  $V = abc \sqrt{1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}$ .

Să transformăm expresia de sub radical într-un produs. Avem:  $1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = 1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta = 1 - \cos \alpha - \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha) - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = \sin^2 \alpha (1 - \cos^2 \beta) - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - (\cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta)^2 = (\sin \alpha \sin \beta + \cos \gamma - \cos \alpha \cos \beta) (\sin \alpha \sin \beta - \cos \gamma + \cos \alpha \cos \beta) = [\cos \gamma - \cos(\alpha + \beta)] [\cos(\alpha - \beta) - \cos \gamma] = 2 \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} \cdot 2 \sin \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2} \sin \frac{\alpha - \beta - \gamma}{2}$ .

Notind  $\alpha + \beta + \gamma = 2p$ , obținem:  $\alpha + \beta - \gamma = 2(p - \gamma)$ ,  $\alpha - \beta + \gamma = 2(p - \beta)$ ,  $\alpha - \beta - \gamma = 2(p - \alpha)$ , deci:

$$V = 2abc \sqrt{\sin p \sin(p - \alpha) \sin(p - \beta) \sin(p - \gamma)}.$$

67. Un paralelipiped dreptunghic cu baza un pătrat se secționează cu un plan care trece prin diagonala bazei inferioare și unul din vîrfurile opuse ale bazei superioare, formînd o piramidă cu aria totală  $S$  (fig. VI, 18). Să se determine aria totală a paralelipipedului, știind că unghiul de la vîrfurile triunghiului obținut prin secțiune este  $\alpha$ . Aplicație numerică:  $\alpha = 60^\circ$ .

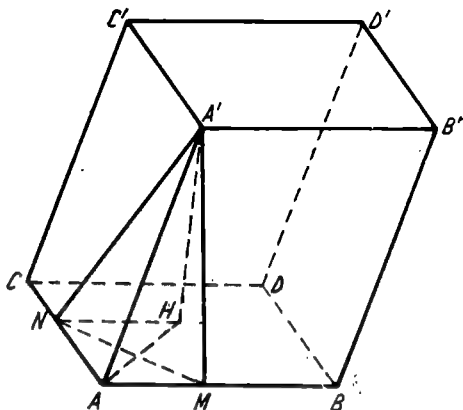


Fig. VI, 17.

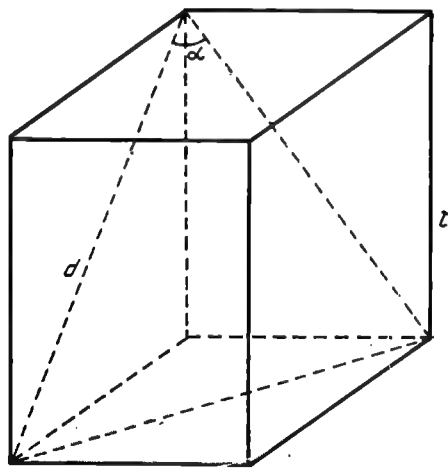


Fig. VI, 18.

*Soluție.* Dacă notăm cu  $S_1$  aria secțiunii și cu  $A$  aria totală a paralelipipedului, atunci avem:

$$A = 4(S - S_1).$$

Fie  $a$  latura bazei,  $d$  lungimea diagonalei uneiafele laterale a paralelipipedului și  $l$  lungimea muchiei laterale a lui.

$$\text{Avem: } a = d\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}, l = \sqrt{d^2 - a^2} = d\sqrt{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}} = d\sqrt{\cos \alpha}. \quad \text{De asemenea: } S_1 = \frac{d^2 \sin \alpha}{2}$$

$$\text{Pe de altă parte: } S = S_1 + \frac{a^2}{2} + 2\frac{la}{2}, \text{ adică: } S = d^2 \left( \frac{\sin \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha} \right).$$

$$\text{De aici deducem: } d^2 = \frac{S}{\frac{\sin \alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$$

$$\text{Rezultă: } S_1 = \frac{S \sin \alpha}{\sin \alpha + 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 2 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}}.$$

$$\text{Cu această valoare obținem: } A = 4S \frac{\sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2 \cos \alpha}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2 \cos \alpha}}.$$

În cazul  $\alpha = 60^\circ$ , obținem:  $A = 2S(3 - \sqrt{3})$ .

**68.** O piramidă regulată, cu latura bazei egală cu  $a$  și unghiul diedru de la bază  $2\alpha$ , se secționează cu planul bisector al diedrului de la bază. Să se determine aria secțiunii.

*Soluție.* Fie  $VABCD$  piramida,  $P$  și  $N$  proiecțiile vârfului  $V$  pe laturile  $AB$ , respectiv  $CD$  și  $C', M, D'$  punctele în care planul bisector al unghiului diedru de muchie  $AB$  intersectează dreptele  $VC, VN, VD$  (fig. VI, 19).

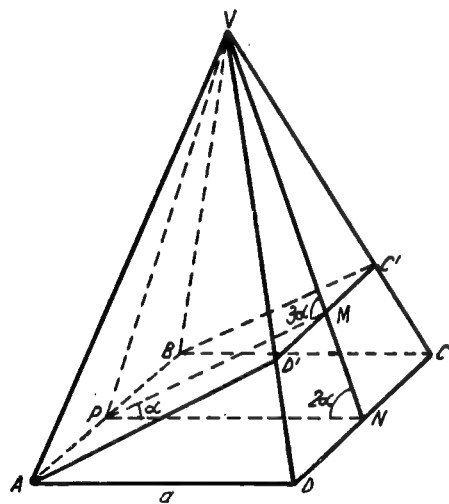


Fig. VI, 19.

$$\text{Avem: } \widehat{VPM} = \widehat{MPN} = \alpha, \widehat{VNP} = 2\alpha, \widehat{VMP} = 3\alpha.$$

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $VPM$ ,

$$\text{obținem: } \frac{VM}{\sin \alpha} = \frac{VP}{\sin 3\alpha}.$$

Din asemănarea triunghiurilor  $VC'D'$  și  $VCD$

$$(C'D' \parallel CD) \text{ rezultă: } C'D' = CD \frac{VM}{VN}.$$

Dar  $VN = VP$  și, ținând seama de relația de

$$\text{mai sus, deducem: } C'D' = a \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Aplicând teorema sinusurilor în triunghiul  $MNP$ , gă-

$$\text{sim: } \frac{MP}{\sin 2\alpha} = \frac{NP}{\sin (180^\circ - 3\alpha)},$$

$$\text{de unde: } MP = a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

$$\begin{aligned}\text{Cu aceste valori, deducem: } S &= \frac{MP(AB + C'D')}{2} = \frac{1}{2} a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha} \left( a + a \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} \right) = \\ &= \frac{a^2 \sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.\end{aligned}$$

69. Se consideră o piramidă  $SABCD$  a cărei bază este un trapez isoscel cu laturile paralele  $AD = a$  și  $BC = b$  ( $a > b$ ). Știind că înălțimea piramidei trece prin punctul  $O$  de intersecție a diagonalelor trapezului și că raportul dintre unghiurile diedre mărginite de laturile paralele ale bazei este 2, să se calculeze volumul piramidei în funcție de  $a$ ,  $b$  și unghiul  $\varphi = \widehat{COD}$ .

Soluție. Fie  $E$  și  $F$  proiecțiile punctului  $S$  pe laturile  $AD$  și  $BC$ . Notînd  $\widehat{SEO} = \alpha$ , rezultă  $\widehat{SFO} = 2\alpha$  (fig. VI, 20).

$$\text{Avem: } SO = OF \cdot \operatorname{tg} 2\alpha = OE \operatorname{tg} \alpha.$$

$$\text{Dar: } OF = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad OE = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

$$\begin{aligned}\text{deci: } a \operatorname{tg} \alpha &= b \operatorname{tg} 2\alpha. \text{ Avînd în vedere că } \operatorname{tg} 2\alpha = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \text{ de aici rezultă: } \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{a-2b}{a}}.\end{aligned}$$

Cu această valoare deducem:

$$SO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}}.$$

$$\begin{aligned}\text{De asemenea, avem: } EF &= OE + OF = \\ &= \frac{(a+b) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{2}, \text{ deci aria trapezului } ABCD \text{ este:}\end{aligned}$$

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot \frac{(a+b) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{2} = \frac{(a+b)^2}{4} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

$$\text{Rezultă: } V = \frac{a(a+b)^2}{24} \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \sqrt{\frac{a-2b}{a}}.$$

Problema este posibilă numai dacă  $a > 2b$ .

70. Să se calculeze aria și volumul corpului obținut prin rotirea unui triunghi dreptunghic în jurul ipotenuzei, în funcție de ipotenuza  $a$  și de suma catetelor  $l$ .

Soluție. Dacă notăm cu  $H$  proiecția vîrfului  $A$  pe ipotenuza  $BC$  și cu  $S$  și  $V$  aria și volumul corpului, avem:  $S = \pi AH(AB + AC) = \pi lAH$ ,  $V = \frac{1}{3} \pi AH^2 \cdot BC = \frac{\pi a}{3} AH^2$ .

$$\begin{aligned}\text{Dar: } AB &= a \cos B, \quad AC = a \sin B, \\ \text{deci: } AH &= AB \sin B = a \sin B \cos B.\end{aligned}$$

$$\text{Făcînd suma celor două catete obținem: } a(\sin B + \cos B) = l \text{ sau: } \sin B + \cos B = \frac{ll}{a}.$$

$$\text{Ridicînd la pătrat această relație, găsim: } \sin^2 B + \cos^2 B + 2 \sin B \cos B = \frac{l^2}{a^2}, \text{ adică:}$$

$$\sin B \cos B = \frac{l^2 - a^2}{2a^2}.$$

$$\text{Deci: } AH = \frac{l^2 - a^2}{2a}.$$

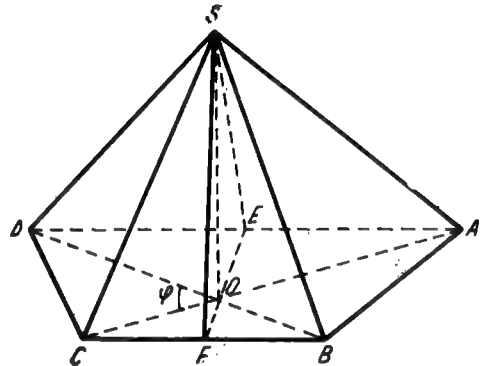


Fig. VI, 20

Cu această valoare deducem:  $S = \frac{\pi l(l^2 - a^2)}{2a}$ ,  $V = \frac{\pi(l^2 - a^2)^2}{12a}$ .

**71.** Un triunghi dreptunghic  $ABC$  se rotește în jurul ipotenuzei  $BC$ . Să se determine în funcție de ipotenuza  $a$  și de unghiul ascuțit  $B$  aria și volumul corpului obținut. Pentru ce valoare a lui  $B$  volumul este maxim?

*Soluție.* Corpul obținut este format din două conuri. Dacă notăm cu  $H$  proiecția lui  $A$  pe  $BC$  și  $AH = h$ , avem:  $S = \pi h(b + c)$ .

Dar:  $b = a \sin B$ ,  $c = a \cos B$ ,  $h = c \sin B = a \sin B \cos B$ ,  
deci:  $S = \pi a^2 \sin B \cos B (\sin B + \cos B) = \pi a^2 \sin B \cos B [\sin B + \sin (90^\circ - B)]$   
 $= 2\pi a^2 \sin B \cos B \sin 45^\circ \cos (45^\circ - B) = \frac{\sqrt{2}}{2} a^2 \sin 2B \cos (45^\circ - B)$ .

Avem:  $V = \frac{1}{3} \pi h^2 (BH + HC) = \frac{1}{3} \pi h^2 a = \frac{1}{3} \pi a^3 \sin^2 B \cos^2 B = \frac{\pi a^3}{12} \sin^2 2B$ .

Volumul  $V$  este maxim când  $\sin 2B$  este maxim, deci pentru  $\sin 2B = 1$ , adică:  $B = 45^\circ$ .

În acest caz, avem:  $S = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi a^2$ ,  $V = \frac{\pi a^3}{12}$ .

**72.** Fie  $SAB$  un triunghi isoscel ( $SA = SB$ ),  $A'$  și  $B'$  două puncte pe laturile  $SA$ , respectiv  $SB$ , astfel încât  $A'B' \parallel AB$  și  $O$  și  $O'$  să fie proiecțiile punctului  $S$  pe  $AB$ , respectiv pe  $A'B'$ . Notăm  $OA = r$ ,  $SO = h$ ,  $\widehat{AOO'} = x$ . Se cere:

1° Să se determine aria laterală  $S_l$ , aria totală  $S_t$  și volumul  $V$  ale conului obținut prin rotirea triunghiului  $OA'B'$  în jurul înălțimii  $OO'$ .

2° Să se determine unghiul  $x$ , astfel încât raportul dintre  $S_t$  și aria sferei de diametru  $OO'$  să fie egal cu  $k$ .

*Soluție.* 1°. Dacă notăm  $O'A' = r'$ ,  $OO' = h'$ ,  $OA' = l'$ , avem:  $r' = h' \operatorname{tg} x$ ,  $l' = \frac{h'}{\cos x}$ .

Din asemănarea triunghiurilor  $SA'O'$  și  $SAO$  deducem:  $\frac{r'}{r} = \frac{h - h'}{h}$ ,

adică:  $\frac{h' \operatorname{tg} x}{r} = \frac{h - h'}{h}$ .

De aici deducem:  $h' = \frac{rh \cos x}{r \cos x + h \sin x}$ , deci:  $r' = \frac{rh \sin x}{r \cos x + h \sin x}$ ,

$l' = \frac{rh}{r \cos x + h \sin x}$ .

Cu aceste valori, avem:  $S_l = \pi r' l' = \frac{r^2 h^2 \sin x}{(r \cos x + h \sin x)^2}$ ,  $S_t = \pi r' (l' + r') =$   
 $= \frac{\pi r h \sin x}{r \cos x + h \sin x} \left( \frac{rh \sin x}{r \cos x + h \sin x} + \frac{rh}{r \cos x + h \sin x} \right) = \frac{\pi r^2 h^2 \sin x (1 + \sin x)}{(r \cos x + h \sin x)^2}$ ,

$V = \frac{1}{3} \pi r'^2 h' = \frac{r^3 h^3 \sin^2 x \cos x}{(r \cos x + h \sin x)^3}$ . 2° Aria sferei cu diametrul  $OO'$  este  $\pi h'^2$ , deci condiția dată devine:  $\frac{\sin x (1 + \sin x)}{\cos 2x} = k$ .

Dar  $\cos^2 x = (1 - \sin x)(1 + \sin x)$ , deci obținem ecuația:  $\frac{\sin x}{1 - \sin x} = k$ ,

de unde:  $\sin x = \frac{k}{k + 1}$ .

Problema este totdeauna posibilă căci,  $k$  fiind un număr pozitiv, avem:  $\frac{k}{k + 1} < 1$ .

**73.** Se consideră un semicerc de rază  $R$  și de diametru  $AB$ . Fie  $C$  și  $D$  două puncte pe semicerc, astfel încât arc  $AC = \alpha$ , arc  $AD = \beta$ . Se unesc punctele  $C$  și  $D$  cu centrul  $O$  al semicercului și se rotește sectorul  $COD$  în jurul diametrului  $AB$ . Să se calculeze aria totală a sectorului sferic obținut.



*Soluție.* Suprafața  $S$  căutată este formată din suprafețele laterale  $S_1$  și  $S_2$  ale conurilor determinate prin rotirea razelor  $OC$  și  $OD$  și aria  $S_3$  a zonei sferice determinată prin rotirea arcului  $CD$ . Dacă notăm cu  $C'$  și  $D'$  proiecțiile punctelor  $C$  și  $D$  pe diametrul  $AB$  (fig. VI, 21) avem:  $S_1 = \pi CC' \cdot OC$ .

Dar  $\widehat{COA} = \alpha$ , deci  $CC' = R \sin \alpha$ . Cu această valoare deducem:  $S_1 = \pi R^2 \sin \alpha$ .

Analog:  $S_2 = \pi R^2 \sin \beta$ .

De asemenea:  $S_3 = 2\pi R \cdot C'D'$  și, ținând seama că:  $C'D' = OD' - OC' = R(\cos \beta - \cos \alpha)$ , găsim:  
 $S_3 = 2\pi R^2(\cos \beta - \cos \alpha)$ .

Rezultă:

$$S = \pi R^2(\sin \alpha + \sin \beta + 2 \cos \beta - 2 \cos \alpha).$$

Vom transforma această expresie pentru a o face calculabilă prin logaritmi. Avem:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad \cos \beta - \cos \alpha = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\text{deci: } S = 2\pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \right).$$

Vom introduce unghiul auxiliar  $\varphi$  determinat de relația:  $\operatorname{tg} \varphi = 2$ .

$$\begin{aligned} \text{Cu aceasta deducem: } S &= \frac{2\pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \varphi} \left( \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \varphi + \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \varphi \right) = \\ &= \frac{2\pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - 2\varphi}{2}}{\cos \varphi} \text{ sau, ținând seama că } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}: \\ S &= 2\sqrt{5} \pi R^2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta - 2\varphi}{2}. \end{aligned}$$

74. Se consideră un semicerc cu centrul în  $O$  și cu diametrul  $AA' = 2R$ . Printr-un punct  $C$  al semicercului ducem o coardă  $CC' = 2x$  paralelă cu  $AA'$ . Se cere să se determine  $x$  astfel încât raportul dintre volumul trunchiului de con obținut prin rotirea trapezului  $AA'C'C$  în jurul razei  $OB \perp AA'$  și volumul segmentului sferic obținut prin rotirea arcului  $AC$  în jurul aceleiași raze să fie egal cu  $\sin \alpha$ ,  $\alpha$  fiind un unghi ascuțit dat. Discuție.

*Soluție.* Dacă notăm cu  $V_1$  volumul trunchiului de con și cu  $V_2$  volumul segmentului sferic,

$$\text{avem (fig. VI, 22): } V_1 = \frac{1}{3} \pi OD(R^2 + x^2 + Rx) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2} (R^2 + x^2 + Rx),$$

$$V_2 = \frac{1}{6} \pi OD^3 + \frac{1}{2} \pi OD(R^2 + x^2) =$$

$$= \frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2} (2R^2 + x^2).$$

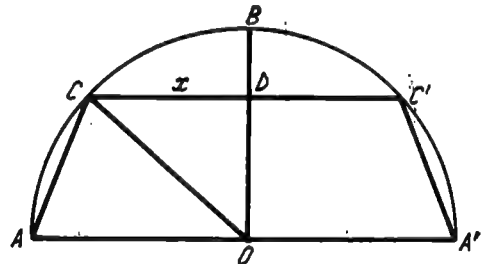


Fig. VI, 22.

$$\begin{aligned} \text{Condiția problemei se scrie: } & \frac{\frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2} (R^2 + x^2 + Rx)}{\frac{\pi}{3} \sqrt{R^2 - x^2} (2R^2 + x^2)} = \sin \alpha. \end{aligned}$$

Pentru ca rădăcinile acestei ecuații să fie reale trebuie ca:  $R^2 - 4R^2(1 - \sin \alpha)(1 - 2 \sin \alpha) \geq 0$  sau:  $8 \sin^2 \alpha - 12 \sin \alpha + 3 \leq 0$ .

Ținând seama că  $0 < \sin \alpha < 1$ , de aici rezultă:  $\frac{3 - \sqrt{3}}{3} < \sin \alpha < 1$ . (2)

Dacă notăm cu  $S$  și  $P$  suma și produsul rădăcinilor ecuației (1), avem:

$$S = -\frac{R}{1 - \sin \alpha} < 0, P = R^2 \frac{1 - 2 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Dacă  $P > 0$ , ecuația (1) are două rădăcini negative, deci neacceptabile. Rezultă că trebuie să avem  $P < 0$ , adică:  $\frac{1}{2} < \sin \alpha < 1$ .

Dacă această condiție este satisfăcută, atunci și condiția (2) este satisfăcută, căci:

$$\frac{3 - \sqrt{3}}{4} < \frac{1}{2}.$$

Deci trebuie să avem:  $30^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

**75.** Se dă un cerc cu centrul în punctul  $O$  și de rază  $R$ . Printr-un punct  $A$  de pe cerc se duc diametrul  $AB$  și o coardă  $AC$ . Să se determine poziția coardei  $AC$ , astfel încît:

1° Raportul dintre aria calotei sferice determinate prin rotirea arcului  $AC$  în furul diametrului  $AB$  și aria laterală a conului obținut prin rotirea coardei  $AC$  să fie un număr dat  $k$ .

2° Aria laterală a conului de la 1° să fie egală cu aria calotei obținute prin rotirea arcului  $BC$ .

*Soluție.* 1° Fie  $D$  proiecția punctului  $C$  pe diametrul  $AB$ . Notînd cu  $S_1$  aria conului și cu  $S_2$  aria calotei, avem:  $S_1 = \pi CD \cdot AC$ ,  $S_2 = 2\pi R \cdot AD$ .

Dar, dacă notăm  $\widehat{CAB} = x$ , avem:  $AC = 2R \cos x$ ,  $CD = AC \sin x = 2R \sin x \cos x$ ,  $AD = AC \cos x = 2R \cos^2 x$ , deci:  $S_1 = 4R^2 \pi \sin x \cos^2 x$ ,  $S_2 = 4R^2 \pi \cos^2 x$ .

$$\text{Rezultă: } \frac{S_2}{S_1} = \frac{1}{\sin x}.$$

Unghiul  $x$  este determinat de ecuația:  $\sin x = \frac{1}{k}$  și problema este posibilă dacă  $k \geq 1$ .

2° Notînd cu  $S_3$  aria calotei determinată prin rotirea arcului  $BC$ , avem:  $S_3 = 2\pi R \cdot BD$ . Dar:  $BD = 2R - AD = 2R - 2R \cos^2 x = 2R \sin^2 x$ , deci:  $S_3 = 4R^2 \pi \sin^2 x$ .

Condiția  $S_1 = S_3$  devine:  $\sin x \cos^2 x = \sin^2 x$  sau, ținînd seama că  $\sin x \neq 0$ :  $\cos^2 x = \sin x$ , adică:  $\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ .

Avînd în vedere că  $0 < \sin x \leq 1$ , de aici rezultă:  $\sin x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ , deci:  $x = 38^\circ 10' 21''$ .

**76.** Să se determine conul circumscris unei sfere de rază  $R$ , care să aibă aria totală minimă.

*Soluție.* Dacă notăm cu  $x$  raza, cu  $y$  înălțimea, cu  $z$  generatoarea conului și cu  $2\alpha$  unghiul de la vîrf al secțiunii axiale, atunci avem:  $y = R + \frac{R}{\sin \alpha} = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha}$ ;  $x = y \operatorname{tg} \alpha =$

$$= \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha}; z = \frac{x}{\sin \alpha} = \frac{R(1 + \sin \alpha)}{\sin \alpha \cos \alpha}.$$

Aria totală a conului este:  $S = \pi(x^2 + xz) = \pi \left( x^2 + \frac{x^2}{\sin \alpha} \right) = \frac{\pi R^2(1 + \sin \alpha)^2}{\sin \alpha(1 - \sin \alpha)}$ .

Dacă notăm:  $\frac{(1 + \sin \alpha)^2}{\sin \alpha (1 - \sin \alpha)} = m$ , atunci:  $S = \pi R^2 m$  și aria totală este minimă o

dată cu  $m$ . (1)

Din (1) rezultă:  $(m + 1) \sin^2 \alpha - (m - 2) \sin \alpha + 1 = 0$ . (2)

Dar această ecuație trebuie să aibă rădăcini reale, deci:  $(m - 2)^2 - 4(m + 1) \geq 0$ , adică:  $m^2 - 8m \geq 0$  și, având în vedere că  $m > 0$ , rezultă:  $m \geq 8$ .

Rezultă că valoarea minimă a lui  $m$  este 8. Pentru această valoare, din (2) deducem:  $\sin \alpha =$

$$= \frac{1}{3}, \text{ adică: } \alpha = 19^\circ 28' 17''.$$

Cu această valoare avem:  $y = 4R$ ,  $x = R\sqrt{2}$ ,  $z = 3\sqrt{2}R$ ,  $S = 8\pi R^2$ .

7

## Exerciții și probleme propuse

1. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic avem următoarele relații:

a)  $\sin 2B = \frac{4S}{a^2}$ ; b)  $\operatorname{ctg} B + \operatorname{cosec} B = \frac{a+c}{b}$ ;

c)  $\operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{S}{p^2}$ ; d)  $\sin(B - C) = \frac{b^2 - c^2}{b^2 + c^2}$ .

2. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$ , în care se dau:

a)  $a = 57,54$ ,  $B = 44^\circ 55'$ ;

e)  $a = 9,994$ ,  $b = 5,752$ ;

b)  $a = 163,2$ ,  $B = 40^\circ 22'$ ;

f)  $a = 176$ ,  $b = 160,5$ ;

c)  $b = 50,94$ ,  $B = 43^\circ 48'$ ;

g)  $b = 41,3$ ,  $c = 62,08$ ;

d)  $b = 29,54$ ,  $B = 25^\circ 37'$ ;

h)  $b = 141$ ,  $c' = 181,2$ .

3. Să se rezolve triunghiul dreptunghic  $ABC$  în care se dau:

a)  $b + c = 252,4$ ,  $b - c = 7,60$ ; b)  $a = 225$ ,  $\frac{c}{b} = 0,75$ ; c)  $a = 4765,35$ ,  $b + c = 6642,777$ .

4. Să se rezolve un triunghi dreptunghic în care se dau cateta  $b$  și diferența  $a - c = d$ .

5. Într-un triunghi dreptunghic  $ABC$  se dă  $\frac{b}{2} = 2 + \sqrt{3}$  și se cere să se determine unghiurile  $B$  și  $C$ , calculând în prealabil  $\cos(B - C)$ .

6. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare avem următoarele relații:

a) 
$$\frac{a \sin \frac{B-C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C-A}{2}}{\cos \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A-B}{2}}{\cos \frac{C}{2}} = 0;$$

b) 
$$\frac{a^2 \sin(B - C)}{\sin B + \sin C} + \frac{b^2 \sin(C - A)}{\sin C + \sin A} + \frac{c^2 \sin(A - B)}{\sin A + \sin B} = 0;$$

c) 
$$\frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{a} + \frac{\sin^2 \frac{B}{2}}{b} + \frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{c} = \frac{2ab + 2bc + 2ac - a^2 - b^2 - c^2}{4abc};$$

d) 
$$\operatorname{ctg} \frac{A}{2} + \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + \operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \frac{p}{p-a} \operatorname{ctg} \frac{A}{2};$$

$$e) \frac{a \sin \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{b \sin \frac{C-A}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{c \sin \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{C}{2}} = 0;$$

$$f) \frac{a^2 \sin (B-C)}{\sin A} + \frac{b^2 \sin (C-A)}{\sin B} + \frac{c^2 \sin (A-B)}{\sin C} = 0.$$

7. Să se demonstreze că într-un triunghi oarecare  $ABC$ , avem:

$$\frac{a \cos A + b \cos B + c \cos C}{a + b + c} = \frac{r}{R}.$$

8. Să se arate că într-un triunghi oarecare avem:

$$\frac{\cos A - \cos B \cos C}{\sin B \sin C} + \frac{\cos B - \cos A \cos C}{\sin A \sin C} + \frac{\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B} = 1.$$

9. Să se demonstreze că dacă în triunghiul  $ABC$  este satisfăcută una dintre relațiile:

$$a) \sin 2B + \sin 2C = \frac{2S}{R^2},$$

$$b) \sin C = \cos A + \cos B$$

$$c) \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2,$$

triunghiul este dreptunghic.

10. Să se demonstreze că dacă în triunghiul  $ABC$  este satisfăcută una dintre relațiile:

$$a) \sin A = 2 \sin B \cos C,$$

$$b) a = 2b \sin \frac{A}{2},$$

$$c) \frac{2 \sin A \sin B}{\sin C} = \operatorname{ctg} \frac{C}{2},$$

$$d) \cos A = \frac{Ra}{2S},$$

$$e) \cos \frac{A}{2} = \frac{a(b+c)}{4S},$$

$$f) p = 2R \cos \frac{A}{2} \left(1 + \sin \frac{A}{2}\right),$$

triunghiul este isoscel.

11. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau:

- a)  $a = 91,25$ ,  $B = 35^\circ 45'$ ,  $C = 42^\circ 28'$ ; e)  $a = 510$ ,  $b = 317$ ,  $C = 76^\circ 19'$ ;  
 b)  $a = 274,5$ ,  $A = 33^\circ 18'$ ,  $C = 82^\circ 48'$ ; f)  $a = 514,1$ ,  $b = 362$ ,  $C = 60^\circ 12'$ ;  
 c)  $b = 13,02$ ,  $A = 11^\circ 48'$ ,  $B = 133^\circ 42'$ ; g)  $a = 33,9$ ,  $b = 54,6$ ,  $C = 31^\circ 10'$ ;  
 d)  $c = 15,94$ ,  $A = 51^\circ 38'$ ,  $B = 18^\circ 19'$ ; h)  $b = 28$ ,  $c = 42$ ,  $A = 124^\circ$ .

12. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care:

- a)  $a = 26,73$ ,  $b = 22,98$ ,  $A = 63^\circ$ ; e)  $a = 635$ ,  $b = 824$ ,  $c = 429$ ;  
 b)  $a = 26,73$ ,  $b = 28,97$ ,  $A = 63^\circ$ ; f)  $a = 542,7$ ,  $b = 621,4$ ,  $c = 693,5$ ;  
 c)  $a = 20$ ,  $b = 23$ ,  $A = 76^\circ$ ; g)  $a = 19$ ,  $b = 34$ ,  $c = 49$ ;  
 d)  $a = 34$ ,  $b = 93$ ,  $A = 14^\circ 15'$ ; h)  $a = 421,6$ ,  $b = 409,8$ ,  $c = 335,9$ .

13. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau  $a$ ,  $A$  și relația  $b(b+c) = k^2$ .

14. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau unghiul  $A$ , diferența  $b-c=l$  și înălțimea  $h$  coborâtă din vârful  $A$ .

15. Să se rezolve triunghiul  $ABC$ , în care se dau unghiul  $A$ , înălțimea  $h$  coborâtă din vârful  $A$  și raza  $R$  a cercului circumscris.

16. Să se rezolve un triunghi în care se dau un unghi, perimetrul  $2p$  și aria

$$S = \frac{k^2}{2}.$$

17. Să se rezolve triunghiul  $ABC$  în care se dau razele  $R$  și  $r$ , știind că  $a^2 + b^2 + c^2 = 8 R^2$ .
18. Să se rezolve un triunghi în care se dau o latură, aria și raza cercului circumscris.
19. Să se rezolve un triunghi cunoscând suma a două laturi, înălțimea corespunzătoare celei de-a treia laturi și raza cercului circumscris.
20. Să se rezolve un triunghi cunoscând razele cercurilor înscrise.
21. Să se rezolve un triunghi cunoscând un unghi, raza cercului circumscris și distanța dintre centrul cercului circumscris și centrul cercului înscris.
22. Fiind dat un triunghi și cercul înscris în el se duc la el tangentele paralele cu laturile triunghiului. Se formează astfel trei triunghiuri interioare primului. Să se arate că:
  - 1° suma razelor cercurilor înscrise în cele trei triunghiuri interioare este egală cu raza cercului înscris în triunghiul dat;
  - 2° produsul ariilor celor patru triunghiuri este egal cu puterea a opta a aceleiași raze.
23. Se consideră un cerc de rază  $R$  și un punct  $A$  situat la distanța  $d > R$  de centrul cercului. Să se ducă prin punctul  $A$  o secantă, astfel încît suma pătratelor segmentelor cuprinse între acest punct și punctele de intersecție cu cercul să fie egală cu  $m^2$ .
24. Fie  $xOy$  un unghi a cărui mărime este  $2\alpha$  și  $M$  un punct pe bisectoarea lui. Să se ducă prin acest punct o dreaptă, astfel încît dacă notăm cu  $A$  și  $B$  punctele în care ea intersectează laturile  $Ox$ , respectiv  $Oy$  ale unghiului, să avem  $AM + MB = a$ .
25. Fie  $xOy$  un unghi drept și  $M$  un punct situat la distanțele  $a$  și  $b$  de laturile unghiului. Să se ducă prin  $M$  o dreaptă care să intersecteze laturile  $Ox$  și  $Oy$  în punctele  $A$ , respectiv  $B$ , astfel încît  $MA^2 + MB^2 = k^2$ .
26. Fiind date un cerc de rază  $R$ , o coardă  $AB$  de lungime  $R\sqrt{3}$  și o coardă  $AC$ , care face cu  $AB$  unghiul  $\alpha$ , se cere să se rezolve triunghiul  $ABC$  și să se determine apoi unghiul  $\alpha$  cu condiția  $AC^2 - BC^2 = mR^2$ , ( $m > 0$ ).
27. Se consideră un segment  $AB$  al cărui mijloc este  $D$ . Prin  $D$  se duce o dreaptă  $DC$ , care face cu  $AB$  un unghi  $\alpha$ . Să se determine lungimea segmentului  $DC$ , știind că  $\widehat{BCD} = 2 \widehat{ACD}$ .
28. Se consideră un semicerc de diametru  $AB = 2R$  și fie  $AD$  o coardă a semicercului care face cu  $AB$  unghiul  $2\alpha$  și  $C$  mijlocul arcului  $BD$ . Să se calculeze în funcție de  $R$  și  $\alpha$  laturile și diagonalele patrulaterului  $ABCD$  și să se determine unghiul  $\alpha$  astfel încît perimetrul patrulaterului să fie egal cu  $4 Rm$ .
29. Pe un cerc cu centrul în  $O$  și cu raza  $R$  se consideră un punct fix  $A$  și tangenta la cerc în acest punct. Pe această tangentă se ia un punct  $B$ , astfel încît  $AB = a$ . Se unește punctul  $B$  cu un punct  $M$  mobil pe cerc și se cere:
  - 1° să se calculeze lungimea segmentului  $BM$  în funcție de  $R$  și de  $\varphi = \widehat{AOM}$ ;
  - 2° să se determine unghiul  $\varphi$  astfel încît  $BM = l$ .
30. Se consideră un sfert de cerc  $AOB$  și fie  $AT$  tangenta în punctul  $A$ . Notăm cu  $M$  un punct oarecare pe arcu  $AB$  și cu  $N$  punctul în care dreapta  $OM$  intersectează tangenta  $AT$ . Să se determine  $\widehat{AOM}$  astfel încît  $MN = kMA$ , ( $k = \text{const.}$ ).

31. Se consideră un triunghi  $ABC$  dreptunghic în  $A$ , în care  $B = 30^\circ$  și înălțimea  $AH = h$ . Să se determine un punct  $P$  pe cateta  $AB$  și unul  $Q$  pe cateta  $AC$ , astfel încît  $\widehat{PHA} = \widehat{QHA}$  și
- $$\frac{1}{HP} + \frac{1}{HQ} = \frac{2m}{h} (m = \text{const.}).$$
32. Să se determine numărul de laturi al unui poligon regulat, știind că raportul dintre aria lui și aria poligonului regulat asemenea cu acesta, circumscris cercului în care este înscris primul, este  $\frac{3}{4}$ .
33. Să se calculeze aria unui trapez isoscel a cărui înălțime este  $h$ , știind că latura neparalelă este văzută din centrul cercului circumscris trapezului sub unghiul  $\alpha$ .
34. În interiorul unui poligon regulat cu  $n$  laturi, de latură  $a$ , se înscriu  $n$  cercuri egale, astfel încît fiecare cerc să fie tangent la două laturi consecutive ale poligonului și la alte două cercuri. Să se determine aria figurii mărginită de cercurile considerate.
35. În triunghiul  $ABC$ , pe latura  $BC$  se ia un punct  $D$  și se construiesc cercurile circumscrise triunghiurilor  $ACD$  și  $BCD$ . Să se demonstreze că raportul razelor acestor cercuri este constant. Să se determine poziția punctului  $D$  pentru care aceste raze au valoarea minimă.
36. O piramidă patrulateră regulată  $VABCD$  are ca bază pătratul  $ABCD$  și înălțimea de lungime  $h$ . Să se determine unghiul dintre înălțimea piramidei și planul  $VAB$ , știind că aria triunghiului  $VAB$  este  $h^2$ .
37. Se consideră o piramidă regulată avînd ca bază un hexagon regulat cu latura  $a$  și ale cărei muchii laterale sînt egale cu latura triunghiului echilateral înscris în același cerc cu baza. Să se afle valoarea unghiului dintre o față laterală și bază.
38. Se dau două drepte necoplanare, care fac între ele unghiul  $\alpha$  și a căror perpendiculară comună  $AB$  are lungimea  $h$ . Să se determine pe cele două drepte, două puncte  $C$ , respectiv  $O$ , astfel încît tetraedrul  $ABCD$  să aibă volumul  $a^3$  și segmentul  $CD$  să aibă lungimea  $l$ .
39. Se consideră un unghi drept  $xOy$ . Prin punctul  $O$  se duce în planul unghiului un segment  $OA$  de lungime  $a$ , situat în interiorul unghiului, astfel încît  $\widehat{xOA} = \varphi$ . Notăm cu  $B$  și  $C$  proiecțiile lui  $A$  pe  $Ox$  și  $Oy$ . Să se determine aria totală a cilindrului obținut prin rotirea dreptunghiului  $OBAC$  în jurul dreptei  $Ox$ .
40. Două conuri circulare drepte opuse la bază sînt înscrise în aceeași sferă de rază  $R$ . Să se determine aceste conuri astfel încît diferența dintre volumele celor două conuri să fie maximă.
41. Să se circumscrie unui semicerc de rază  $R$  un trapez isoscel  $ABCD$ , ( $AD =$  = baza mare), astfel încît raportul dintre volumul obținut prin rotirea trapezului în jurul bazei  $AD$  și aria sferei obținute prin rotirea semicercului să fie  $k$ .

## Lucrări practice

1. Unghi orizontal este unghiul măsurat în planul orizontului, care trece prin ochiul observatorului, între direcțiile la două obiecte. În figura VII, 1,  $\alpha = \widehat{AOB}$  este unghiul orizontal măsurat din punctul de observație  $O$ , între obiectele  $A$  și  $B$ .

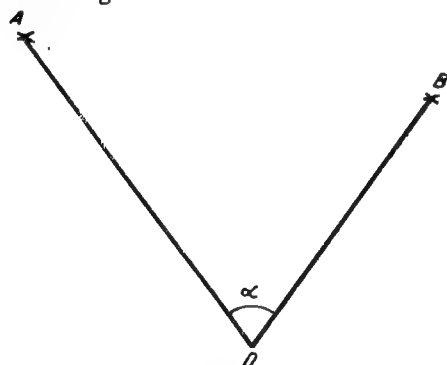


Fig. VII, 1

2. Unghi vertical este unghiul măsurat în planul vertical, de la planul orizontului până

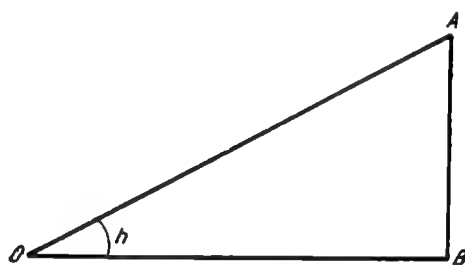


Fig. VII, 2.

la direcția la obiect (vîrful obiectului). În figura VII, 2,  $h = \widehat{BOA}$  este unghiul vertical măsurat din punctul de observație  $O$ , între baza obiectului  $B$ , situată în planul orizontului și vîrful obiectului  $A$ .

## Probleme rezolvate

1. De la o distanță de 68 m de baza unui turn, se măsoară la vîrful lui un unghi vertical de  $42^{\circ}25'$ . Știind că înălțimea ochiului observatorului deasupra orizontului este de 1,75 m să se calculeze înălțimea turnului (fig. VII, 3).

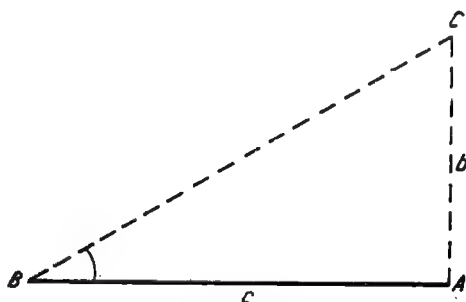


Fig. VII, 3.

Soluție.  $b = c \operatorname{tg} B$ ;

$$\begin{array}{r} \lg c = 1,83251 \\ \lg \operatorname{tg} B = \overline{1,96078} \\ \hline \lg b = 1,79329 \\ b = 62,13 \text{ m} \end{array}$$

Adunând 1,75 m, obținem  $AB = 63,88 \text{ m}$ .

2. Se măsoară un unghi vertical de  $32^{\circ}17'$  la vârful unui turn a cărui bază este înaccessibilă, dar așezată pe un teren orizontal; înaintând 15 m către turn se mai măsoară un unghi vertical de  $45^{\circ}30'$ . Știind că ochiul observatorului este la 1,30 m deasupra orizontului se cere înălțimea turnului (fig. VII, 4).

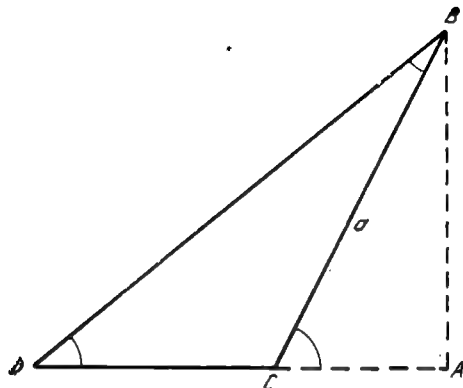


Fig. VII, 4.

1.  $\widehat{BDC} = 32^{\circ}17'$
2.  $\widehat{BCA} = 45^{\circ}30'$
3.  $DC = 15 \text{ m}$
4.  $AB = ?$

Soluție.  $\widehat{CBD} = 13^{\circ}13'$ . În  $\triangle BDC$ :  $BC =$   
 $= a = \frac{CD \sin D}{\sin \widehat{CBD}}$ .

Dar în  $\triangle ABC$ ,  $AB = a \sin C$ , deci  $AB =$   
 $= \frac{CD \sin D \sin C}{\sin \widehat{CBD}}$ .

$$\lg CD = 1,17609$$

$$\lg \sin D = 1,72763$$

$$\lg \sin C = \overline{1,85324}$$

$$\operatorname{colg} \sin \widehat{CBD} = 0,64086$$

$$\lg AB = 1,39782$$

$$AB = 24,99.$$

Adunând 1,30 m, obținem  $AB = 26,29 \text{ m}$ .

3. Să se calculeze distanța de la un punct A la un punct inaccessibil C. Pe o perpendiculară în punctul A pe AC se alege un punct B, din care se văd punctele A și C.

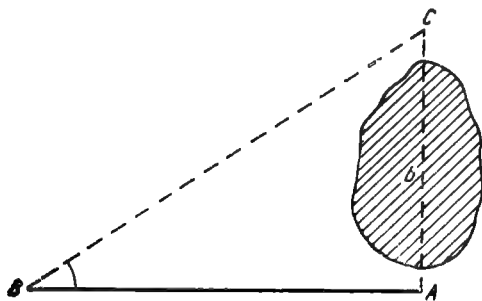


Fig. VII, 5.

Se măsoară unghiul orizontal  $\widehat{ABC} = 38^{\circ}24'$  și distanța  $AB = 62 \text{ m}$  (fig. VII, 5).

Soluție.  $b = c \operatorname{tg} B$

$$\lg c = 1,79229$$

$$\lg \operatorname{tg} B = \overline{1,89905}$$

$$\lg b = 1,69144$$

$$AC = b = 49,14 \text{ m}$$

4. Să se calculeze distanța de la un punct A la un punct inaccessibil C. Pe o dreaptă ce trece prin A se alege un punct convenabil B, din care se văd punctele A



și  $C$ . Se măsoară unghiurile orizontale  $\widehat{BAC} = 58^{\circ}27'$  și  $\widehat{ABC} = 63^{\circ}34'$ , precum, și distanța  $AB = 63,25$  m (fig. VII,6).

Soluție.  $C = 180^{\circ} - (A + B)$ . Din relația  $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ , deducem:  $b = \frac{c \sin B}{\sin C} =$   
 $= \frac{c \sin B}{\sin [180^{\circ} - (A + B)]}$ , deci:  $b = \frac{c \sin B}{\sin (A + B)}$ .

$$\lg c = 1,80106$$

$$\lg \sin B = 1,95204$$

$$\text{colg} \sin (A + B) = 0,07166$$

$$\lg b = 1,82476$$

$$AC = b = 66,80 \text{ m.}$$

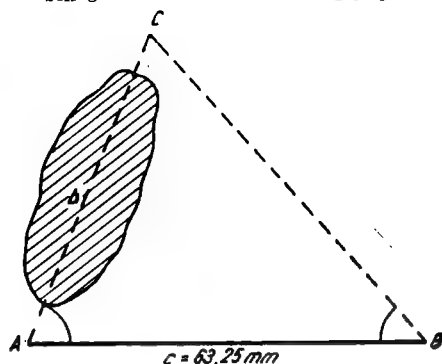


Fig. VII, 6.

5. Din două puncte situate la o distanță de 1 675 m se măsoară simultan, la un punct caracteristic al unui nor, două unghiuri verticale de  $70^{\circ}$  respectiv  $82^{\circ}$ . Știind că punctele de observare au același orizont și că ele împreună cu norul sînt situate într-un plan vertical, să se calculeze înălțimea norului (fig. VII,7).

Soluție.  $AC = \frac{BC \sin' B}{\sin \widehat{BAC}}$  și  $AD = AC \sin C$ ; rezultă:  $AD = \frac{BC \sin B \sin C}{\sin \widehat{BAC}}$ , de unde:

$$\lg BC = 3,22401$$

$$\lg \sin B = 1,99575$$

$$\lg \sin C = 1,97299$$

$$\text{colg} \sin \widehat{BAC} = 0,32839$$

$$\lg AD = 3,52114$$

$$AD = 3320 \text{ m.}$$

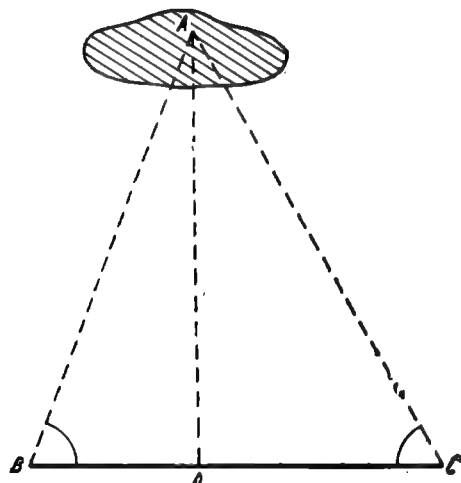


Fig. VII, 7.

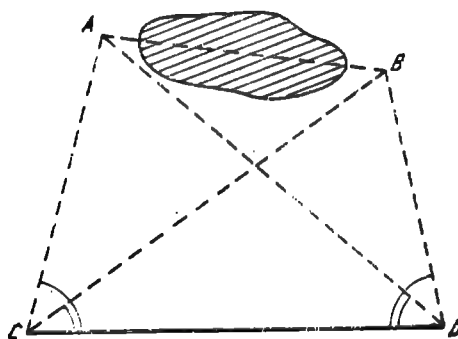


Fig. VII, 8.

6. Să se calculeze distanța dintre două puncte vizibile  $A$  și  $B$ , dar inaccesibile, cunoscînd baza  $CD = 2\,722$  m și unghiurile orizontale  $\widehat{BCD} = 41^{\circ}24'$ ,  $\widehat{ACD} = 54^{\circ}18'$ ,  $\widehat{ADC} = 37^{\circ}24'$  și  $\widehat{BDC} = 83^{\circ}15'$  (fig. VII,8).

Calculăm  $\widehat{CAD}$  și  $AC$  în  $\triangle ADC$ .

$$\widehat{CAD} = 180^\circ - (\widehat{ACD} + \widehat{ADC})$$

$$\widehat{CAD} = 88^\circ 18';$$

$$AC = b = \frac{CD \sin \widehat{ADC}}{\sin \widehat{CAD}}$$

$$\lg CD = 3,43489$$

$$\lg \sin \widehat{ADC} = 1,78346$$

$$\frac{\text{colg} \sin \widehat{CAD} = 0,00019}{\lg b = 3,21854}.$$

Calculăm  $\widehat{CBD}$  și  $BC$  în  $\triangle BCD$ .

$$\widehat{CBD} = 180^\circ - (\widehat{BDC} + \widehat{BCD})$$

$$\widehat{CBD} = 55^\circ 21';$$

$$BC = a = \frac{CD \sin \widehat{BDC}}{\sin \widehat{CBD}}$$

$$\lg CD = 3,43489$$

$$\lg \sin \widehat{BDC} = 1,99698$$

$$\frac{\text{colg} \sin \widehat{CBD} = 0,08479}{\lg a = 3,51666}.$$

Calculăm unghiurile  $A$  și  $B$  în  $\triangle ABC$ .

$$\lg \frac{A-B}{2} = \lg (45^\circ - \varphi) \text{ ctg } \frac{C}{2}$$

$$\frac{1}{2} C = 6^\circ 27'; \text{ ctg } \varphi = \frac{a}{b}$$

$$\lg \text{ctg } \varphi = \lg a - \lg b = 0,2981$$

$$\varphi = 63^\circ 17'$$

$$\varphi - 45^\circ = 18^\circ 17'$$

$$\lg \text{tg } (45^\circ - \varphi) = 1,51903$$

$$\lg \text{ctg } \frac{1}{2} C = 0,94672$$

$$\lg \text{tg } \frac{A-B}{2} = 0,46575$$

$$\frac{1}{2} (A-B) = 71^\circ 07'.$$

$$\text{Dar: } \frac{1}{2} (A+B) = 83^\circ 33'.$$

Rezultă:

$$A = 155^\circ 40',$$

$$B = 11^\circ 26'.$$

Calculăm pe  $AB$  în  $\triangle ABC$ :

$$AB = \frac{AC \sin C}{\sin B}$$

$$\lg AC = 3,21854$$

$$\lg \sin C = 1,34879$$

$$\text{colg} \sin B = 0,70284$$

$$\lg AB = 3,27017$$

$$AB = 1863 \text{ m.}$$

7. La poalele unui deal al cărui vîrf este  $A$ , se consideră o distanță  $BC = 225 \text{ m.}$  Notînd cu  $P$  proiecția lui  $A$  pe planul orizontului, se măsoară unghiul vertical  $\widehat{PCA} = 47^\circ 40'$ , precum și unghiurile  $\widehat{ACB} = 52^\circ 27'$  și  $\widehat{ABC} = 41^\circ 20'$ . Știind că înălțimea ochiului observatorului este de  $1,45 \text{ m}$ , se cere înălțimea dealului  $AP$  (fig. VII, 9).

Soluție. Din triunghiul  $ABC$ , avem:

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = \frac{BC}{\sin \widehat{CAB}},$$

de unde:

$$AC = \frac{BC \sin \widehat{ABC}}{\sin [180^\circ - (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})]} = \frac{BC \sin \widehat{ABC}}{\sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})}.$$

Dar, din triunghiul  $APC$  avem:  $AP = AC \sin \widehat{PCA}$ ,

$$\text{deci: } AP = \frac{BC \sin \widehat{ABC} \sin \widehat{PCA}}{\sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC})};$$

$$\lg BC = 2,35218$$

$$\lg \sin \widehat{ABC} = 1,81983$$

$$\lg \sin \widehat{PCA} = 1,86879$$

$$\text{colg} \sin (\widehat{ACB} + \widehat{ABC}) = 0,00095$$

$$\lg AP = 2,04175$$

$$AP = 110,10 \text{ m.}$$

Adunînd  $1,45 \text{ m}$ , obținem  $AP = 111,55 \text{ m.}$

8. Un observator măsoară un unghi vertical  $\alpha$  la orizontul mării, dintr-un punct  $A$ , de pe acoperișul unui bloc situat pe țărm. Cunosctînd raza  $R$  a Pămîntului, să se calculeze înălțimea blocului (fig. VII, 10).

Soluție. Notăm înălțimea blocului  $AB = x$ , unghiul vertical  $\widehat{CAO} = \alpha$  și complementul său cu  $\beta$ , avem:

$$R = OA \cos \beta = (R + x) \cos \beta,$$

$$\text{de unde: } x = \frac{R(1 - \cos \beta)}{\cos \beta}, \text{ deci: } x = \frac{2R \sin^2 \frac{\beta}{2}}{\cos \beta}.$$

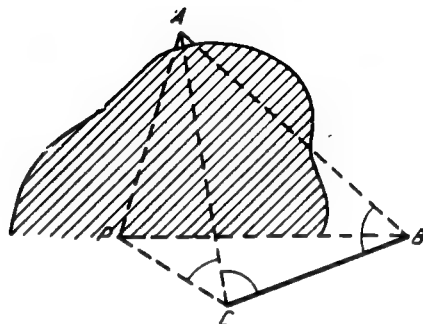


Fig. VII, 9.

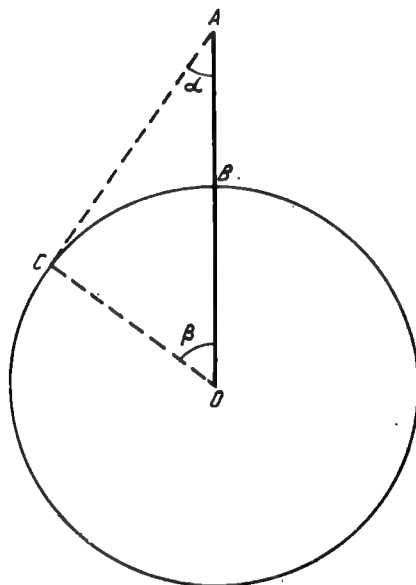


Fig. VII, 10.

9. Un observator vede de pe malul unui rîu vîrful unui copac, situat pe malul opus, sub un unghi vertical de  $60^\circ$ . Depărtîndu-se perpendicular pe mal, la o distanță

40 m, unghiul vertical se reduce la jumătate. Se cere lăţimea rîului şi înălţimea acului (fig. VII, 11).

*Soluţie.* Se observă că:  $\widehat{ADC} = \widehat{ACD} = 30^\circ$ .  
 rezultă:  $AC = AD = 40$  m, deci:  $BC = AC \sin 60^\circ = 20\sqrt{3}$  m şi:  $AB = AC \cos 60^\circ = 20$  m.

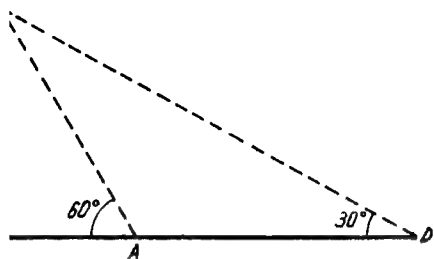


Fig. VII, 11

10. Să se calculeze înălţimea unei statui aşezată pe un pedestal situat într-un loc în-  
 accesibil (fig. VII, 12).

*Soluţie.* Fie o bază  $AB$  care se poate măsura situată în planul orizontal şi în acelaşi plan vertical cu statuia.

Se măsoară din  $A$  unghiurile verticale ale punctelor  $D$  şi  $E$  şi din  $B$  unghiul vertical al punctului  $E$ .

Observăm că:  $\widehat{AEB} = \widehat{CAE} - \widehat{CBE}$ ,

deci:  $AE = \frac{AB \sin \widehat{ABE}}{\sin \widehat{AEB}}$ . Dar:  $\widehat{DAE} = \widehat{EAC} - \widehat{DAC}$ ,

deci:  $DE = \frac{AE \sin \widehat{DAE}}{\sin \widehat{ADE}}$ .

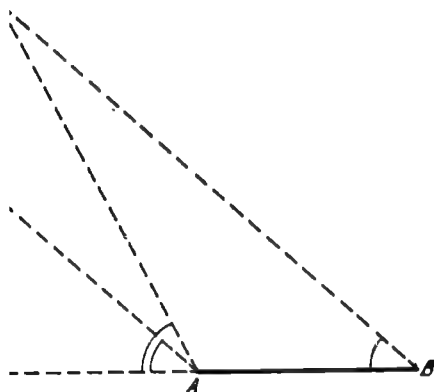


Fig. VII, 12

11. Un stîlp vertical este văzut din trei puncte  $A, B, C$  aflate pe aceeaşi orizontală care trece prin piciorul stîlpului, respectiv sub unghiurile  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$ . Cunoscînd distanţele  $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$  să se afle înălţimea  $x$  a stîlpului şi să se demonstreze că dacă  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$ , atunci avem  $5a = 13b$  (fig. VII, 13).

*Soluţie.* a)  $\widehat{EBD} = \widehat{AEB} + \widehat{BAE}$ .

Dar:  $\widehat{EBD} = 2\alpha$  şi  $\widehat{BAE} = \alpha$ .

Rezultă:  $\widehat{AEB} = \alpha$ , deci:  $BE = a$ . În  $\triangle BDE$  avem:  
 $x = a \sin 2\alpha$ , iar în  $\triangle BCE$  putem scrie:  $\frac{a}{b} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}$ , (1)

de unde:  $\frac{a}{b} = 3 - 4 \sin^2 \alpha = 1 + 2 \cos 2\alpha$ ,

deci:  $\cos 2\alpha = \frac{a - b}{2b}$ . (2)

Aplicînd formula  $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$ , deducem:

$$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{(a+b)(3b-a)}}{2b}. \quad (3)$$

Înlocuind în relaţia (1) obţinem:

$$x = \frac{a}{2b} \sqrt{(a+b)(3b-a)}, \text{ evident, cu condiţia } a < 3b.$$

b) Împărţind relaţiile (2) şi (3) avem:  $\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sqrt{(a+b)(3b-a)}}{a-b}. \quad (4)$

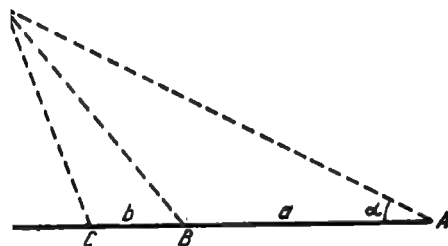


Fig. VII, 13

Dar făcînd  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$  în relația:  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , obținem:  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$ .

Înlocuind în (4) și ridicînd la pătrat avem:  $\frac{9}{16} = \frac{(a+b)(3b-a)}{(a-b)^2}$ , de unde:  $39b^2 + 50ab - 25a^2 = 0$

sau:  $(13b - 5a)(3b + 5a) = 0$ .

Dar relația:  $3b + 5a = 0$  este imposibilă; rezultă:  $13b - 5a = 0$ ; deci:  $5a = 13b$ .

**12. Pe un teren orizontal se găsesc un stîlp și un turn la o distanță  $a$  unul de celălalt. Știind că de la piciorul turnului stîlpul se vede sub un unghi  $\alpha$ , de la piciorul stîlpului turnul se vede sub un unghi de  $2\alpha$  și că, de la mijlocul distanței  $a$ , unghiurile sub care se văd cele două obiective sînt complementare, să se găsească înălțimea stîlpului și a turnului (fig. VII, 14).**

*Soluție.* În  $\triangle ABM$  avem:  $x = a \operatorname{tg} \alpha$ , (1)

iar în  $\triangle ABN$  avem  $y = a \operatorname{tg} 2\alpha$ . (2)

Observăm că:  $\triangle AMP \sim \triangle BNP$ ,

deci:  $xy = \frac{a^2}{4}$ . (3)

Înlocuind relațiile (1) și (2) în (3) obținem:

$$a^2 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a^2}{4} \text{ sau } 4 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha = 1. \quad (4)$$

Rezolvînd ecuația (4) avem:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{3}$  și  $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4}$ , deci:  $x = \frac{a}{3}$  și  $y = \frac{3a}{4}$ .

**13. La săparea unui tunel drept, cunoscîndu-se într-o parte a dealului direcția liniei ferate, să se afle continuarea acestei direcții dincolo de deal. Cu alte cuvinte, se cere să se prelungească o dreaptă dincolo de un obstacol care oprește vederea (fig. VII, 15).**

*Soluție.* Fie  $AB = c$  o distanță cunoscută (se poate măsura). Ne propunem să prelungim direcția  $AB$  dincolo de obstacolul  $M$ . Alegem în teren un punct  $C$ , de unde se pot vedea punctele  $A$  și  $B$ , precum și locul unde se va prelungi direcția  $AB$ .

Putem deci măsura  $\hat{A}$  și  $\hat{B}$ :

În  $\triangle ABC$  avem:

$$BC = a = \frac{c \sin A}{\sin [180^\circ - (A + B)]}. \quad (1)$$

Spre locul în care vrem să prelungim dreapta  $AB$ , considerăm o direcție convenabilă  $CD$  și măsurăm unghiul  $\widehat{BCD} = \alpha$ .

În  $\triangle BDC$  cunoaștem  $BC = a$ , din relația (1) unghiul  $\widehat{DBC} = 180^\circ - B$ , și unghiul  $\alpha$ . Avem:  $B = \alpha + \widehat{BDC}$ , deci  $\widehat{BDC} = B - \alpha$ ; rezultă:  $\widehat{CDE} = 180^\circ - (B - \alpha)$ .

$$\text{De asemenea, avem: } \frac{CD}{\sin \widehat{DBC}} = \frac{a}{\sin \widehat{BDC}} \text{ sau } \frac{CD}{\sin (180^\circ - B)} = \frac{a}{\sin (B - \alpha)},$$

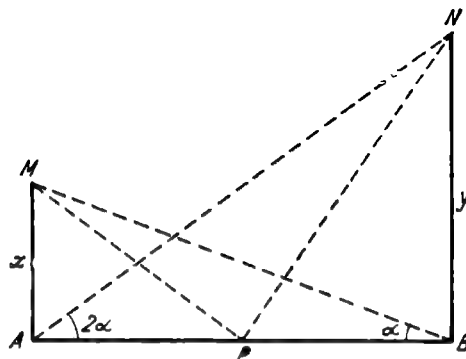


Fig. VII, 14.

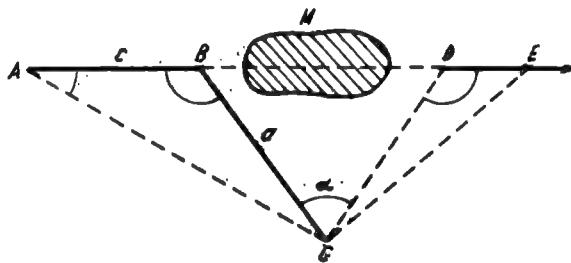


Fig. VII, 15.

de unde:  $CD = \frac{a \sin B}{\sin(B - \alpha)}$ .

În sfârșit, înlocuind pe  $\sigma$  cu valoarea sa din (1) avem:  $CD = \frac{c \sin A \sin B}{\sin(B - \alpha) \sin[180^\circ - (A + B)]}$ . (2)

Rezultă că pe direcția  $CD$  găsim punctul  $D$  astfel ca  $CD$  să fie egal cu valoarea aflată (relația (2)). În punctul  $C$  ducem dreapta  $DE$  care face cu direcția  $DC$  unghiul  $\widehat{CDE} = 180^\circ - (B - \alpha)$ . Evident că direcția căutată, adică prelungirea dreptei  $AB$ , este  $DE$ .

**Exerciții.**

1° Se dă:  $c = 1,5$  km,  $A = 47^\circ 25'$ ,  $B = 102^\circ 52'$  și  $\alpha = 51^\circ 30'$  (fig. VII, 15). Se găsește:  $CD = 2,780$  km și  $\widehat{CDE} = 128^\circ 38'$ . 2° Se dau:  $c = 87,34$  m,  $A = 50^\circ 13' 25''$ ,  $B = 107^\circ 38' 09''$ ,  $\widehat{ACD} = 61^\circ 20' 33''$  (fig. VII, 15). Se găsește:  $CD = 182,284$  m,  $\widehat{CDE} = 111^\circ 42' 58''$ .

14. Cunoscând trei puncte pe teren  $A, B, C$  se cere să se găsească poziția unui al patrulea punct  $M$ , din care se văd segmentele  $AB$  și  $BC$  sub unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$  (fig. VII, 16). Problema este cunoscută sub numele de „Problema hărții”.

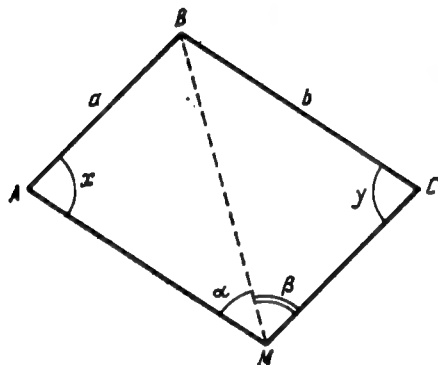


Fig. VII, 16.

**Soluție.** Evident, geometric, poziția punctului  $M$  este dată de intersecția arcelor cercurilor descrise pe  $AB$  și  $BC$  capabile de unghiurile  $\alpha$  și  $\beta$ . Problema este nedeterminată dacă punctul  $M$  aparține cercului circumscris  $\triangle ABC$ .

Vom considera ca necunoscute unghiurile

$$\widehat{MAB} = x \text{ și } \widehat{MCB} = y.$$

$$\text{Avem: } x + y + \alpha + \beta + B = 360^\circ, \text{ deci: } x + y = 360^\circ - \alpha - \beta - B. \quad (1) \quad (2)$$

Fiind necesară diferența  $x - y$ , măsurăm distan-

țele  $AB = a$ ,  $BC = b$ , precum și unghiul  $\widehat{ABC} = B$ .

$$\text{În } \triangle ABM \text{ și în } \triangle BCM, \text{ avem: } BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha} \text{ și } BM = \frac{b \sin y}{\sin \beta}, \text{ de unde: } \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

$$\text{Notăm: } \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta} = \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Unghiul  $\varphi$  se poate calcula ușor, toate elementele din relația (3) fiind cunoscute. Avem

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg} \varphi, \text{ deci } \frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi - 1}{\operatorname{tg} \varphi + 1}, \text{ de unde: } \frac{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}}{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}} = \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ)$$

$$\text{sau: } \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg}(\varphi - 45^\circ). \quad (4)$$

$$\text{Dar din (2) avem: } \frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + B}{2}, \text{ deci: } \operatorname{tg} \frac{x+y}{2} = -\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta + B}{2}. \quad (5)$$

$$\text{Introducând în (4) obținem: } \operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi)}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta + B}{2}}. \quad (6)$$

Din relațiile (2) și (6) putem calcula pe  $x$  și  $y$ . Deci construind dreptele  $AM$  și  $CM$ , găsim punctul  $M$  rezultat din intersecția lor.

**Observații.** Problema este nedeterminată dacă relația (6) este de forma:  $\operatorname{tg} \frac{x-y}{2} = \frac{0}{0}$ ,

adică, dacă:  $\operatorname{tg}(45^\circ - \varphi) = 0$  și  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha + \beta + B}{2} = 0$ , relații care pot avea loc dacă:  $\varphi = 45^\circ$

și  $\alpha + \beta + B = 180^\circ$ . Dar, dacă  $\varphi = 45^\circ$ , din relația (3) obținem:  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ .

De asemenea, din relația  $\alpha + \beta + B = 180^\circ$  reiese că unghiurile  $B$  și  $M$  sînt suplementare, adică patrulaterul  $ABCM$  este inscriptibil.

Rezultă că problema este nedeterminată atunci cînd  $\alpha + \beta = 180^\circ - B$ .

**Exerciții.**

1° Se dă:  $a = 725$  m,  $b = 529$  m,  $\alpha = 43^\circ 24'$ ,  $\beta = 39^\circ 47'$ ,  $B = 132^\circ 35'$  (fig. VII, 16).

Se găsește:  $\varphi = 51^\circ 55' 17''$ ,  $x = 51^\circ 30'$ ,  $y = 92^\circ 44'$ ,  $MA = 1050,30$  m,  $MB = 825,80$  m,  $MC = 609,07$  m. 2° Se dă:  $a = 170$  m,  $b = 200$  m,  $\alpha = 30^\circ 09'$ ,  $\beta = 46^\circ 17' 13''$ ,  $B = 114^\circ 40' 08''$  (fig. 16)

Se găsește:  $\varphi = 39^\circ 15' 57''$ ,  $x = 38^\circ 31' 14''$ ,  $y = 130^\circ 22' 24''$ ,  $BM = 210,80$  m.

**15. Să se calculeze raza unui turn cilindric** (fig. VII, 17).

**Soluție.** Considerăm o bază  $AB = d$  și unghiurile făcute de extremitățile ei cu razele vizuale tangente la turn.

Notăm:  $OC = R$  (raza turnului),  $\widehat{MAB} = \alpha$ ,  $\widehat{QAB} = \alpha'$ ,  $\widehat{M'BA} = \beta$  și  $\widehat{Q'BA} = \beta'$ .  
Observăm că:  $\widehat{OAB} + \widehat{OAC} = \alpha$  și  $\widehat{OAB} - \widehat{OAC} = \alpha'$ . Deci:  $\widehat{OAB} = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$  și  $\widehat{OAC} = \frac{\alpha - \alpha'}{2}$ ; analog  $\widehat{OBA} = \frac{\beta + \beta'}{2}$  și  $\widehat{OBR} = \frac{\beta - \beta'}{2}$ .

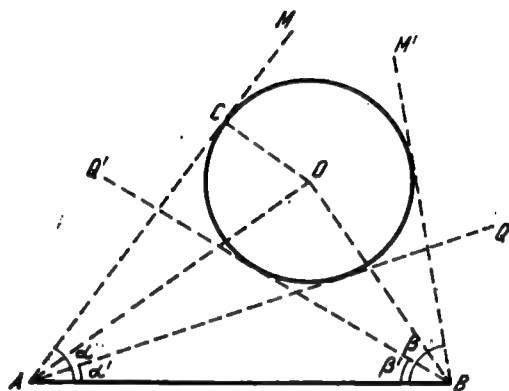


Fig. VII, 17.

În  $\triangle AOB$  avem:  $AO = \frac{d \sin \frac{\beta + \beta'}{2}}{\sin \frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}$ . În  $\triangle OCA$  avem:  $R = AO \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}$ ;

$$\text{rezultă: } R = \frac{d \sin \frac{\alpha - \alpha'}{2} \sin \frac{\beta + \beta'}{2}}{\sin \frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}.$$

**Observație.** Calculînd pe  $BO = \frac{R}{\sin \frac{\beta - \beta'}{2}}$  am fi găsit:  $R = \frac{d \sin \frac{\beta - \beta'}{2} \sin \frac{\alpha + \alpha'}{2}}{\sin \frac{\alpha + \alpha' + \beta + \beta'}{2}}$ .

Comparînd valorile găsite pentru  $R$ , găsim condiția de posibilitate a problemei:

$$\frac{\sin \frac{\alpha - \alpha'}{2}}{\sin \frac{\alpha + \alpha'}{2}} = \frac{\sin \frac{\beta - \beta'}{2}}{\sin \frac{\beta + \beta'}{2}} \text{ sau } \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta'}{2}}.$$

## Probleme propuse

1. Unghiul vertical măsurat la vârful unui turn este de  $42^{\circ}24'13''$ , iar distanța până la baza turnului este de 48,25 m. Care este înălțimea turnului, știind că ochiul observatorului este la 1,20 m deasupra orizontului?
2. Să se calculeze înălțimea unui turn vertical care dă o umbră de 32 m, razele solare căzînd sub un unghi de  $45^{\circ}12'30''$ .
3. Sub ce unghi vede un observator vârful unui turn înalt de 35,20 m, știind că el se află la 49 m de la piciorul turnului și că înălțimea ochiului observatorului este de 1,40 m?
4. Sub ce unghi (cu orizontala) ne vin razele soarelui în momentul cînd umbra pe care o face un copac este de două ori și jumătate cît înălțimea lui?
5. Se măsoară un unghi vertical de  $42^{\circ}53'$  la vârful unui deal; înaintînd 65 m către deal se mai măsoară un unghi vertical de  $68^{\circ}17'$ . Care este înălțimea dealului? (Terenul de la poalele dealului este orizontal și ochiul observatorului se află la o înălțime de 1,72 m).
6. Unghiurile verticale măsurate la un turn din două puncte  $A$  și  $B$  situate pe dreapta orizontală care trece prin piciorul turnului sînt de  $7^{\circ}$ , respectiv  $9^{\circ}25'$ . Să se calculeze înălțimea turnului deasupra planului orizontal al punctelor  $A$  și  $B$ , știind că  $AB = 135,21$  m.
7. Să se calculeze înălțimea unui turn inaccesibil, știind că s-a măsurat o bază orizontală  $AB = 64$  m, care trece prin piciorul turnului, iar unghiurile făcute de această bază cu razele vizuale plecînd din extremitățile ei la vârful turnului, sînt respectiv  $120^{\circ}01'30''$  și  $35^{\circ}05'10''$ . Înălțimea ochiului observatorului este de 1,60 m.
8. Să se calculeze distanța de la un punct  $A$  la un punct inaccesibil  $C$ . Pe o perpendiculară în punctul  $A$  pe  $AC$  se alege un punct  $B$ , din care se văd punctele  $A$  și  $C$ . Se măsoară unghiul orizontal  $\widehat{ABC} = 48^{\circ}25'$  și distanța  $AB = 80$  m.
9. Să se calculeze distanța de la un punct  $B$  la un punct inaccesibil  $A$ . Pe o dreaptă care trece prin  $B$  se alege un punct convenabil  $C$ , din care se văd punctele  $A$  și  $B$ . Se măsoară unghiurile orizontale  $\widehat{ABC} = 98^{\circ}46'10''$  și  $\widehat{BCA} = 56^{\circ}28'50''$ , precum și distanța  $BC = 562,50$  m.
10. Din două puncte situate la o distanță de 1 875 m se măsoară simultan, la un punct caracteristic al unui nor, două unghiuri verticale de  $75^{\circ}$  și  $82^{\circ}$ . Să se calculeze înălțimea norului, știind că punctele de observare au același orizont și că ele împreună cu norul sînt situate într-un plan vertical.
11. Doi observatori depărtați unul de altul la 1 200 m, observă în același timp un balon situat în planul lor vertical. Unghiurile verticale luate de ei simultan sînt respectiv de  $63^{\circ}23'$  și  $72^{\circ}14'$ . Care este înălțimea balonului, știind că înălțimea instrumentelor este de 1,55 m?
12. Să se afle lungimea unei păduri, cunoscînd distanțele de la doi pomi ( $A$  și  $B$ ) din margine, la un punct ( $C$ ) fixat în cîmp, cunoscînd  $BC = a = 1565$  m,  $AC = b = 1\,483$  m și unghiul orizontal  $\widehat{ACB} = 116^{\circ}23'$ .



13. Două imobile  $A$  și  $B$  sînt despărțite printr-un parc. Ambele imobile sînt vizibile dintr-un punct  $C$ , situat la 120 m de  $A$  și 140 m de  $B$ . Știind că unghiul orizontal  $\widehat{ACB} = 68^\circ 36'$ , să se afle distanța dintre cele două imobile.
14. Două localități  $A$  și  $B$ , vizibile dintr-un punct  $C$ , sînt despărțite printr-un lac. Să se afle distanța dintre ele, știind că  $AC = 2,8$  km,  $BC = 1,7$  km și unghiul orizontal  $\widehat{ACB} = 61^\circ 55' 39''$ .
15. Să se calculeze distanța dintre două puncte vizibile  $A$  și  $B$ , dar inaccesibile, cunoscînd baza  $CD = 1\,432,16$  m și unghiurile orizontale  $\widehat{ACD} = 79^\circ 15' 28''$ ,  $\widehat{ADC} = 35^\circ 51' 12''$ ,  $\widehat{BCD} = 46^\circ 25' 57''$  și  $\widehat{BDC} = 64^\circ 36' 06''$ .
16. Să se calculeze distanța dintre două puncte vizibile  $A$  și  $B$ , dar inaccesibile, cunoscînd baza  $CD = 304,10$  m și unghiurile orizontale  $\widehat{ADC} = 28^\circ 30'$ ,  $\widehat{BDC} = 97^\circ 45'$ ,  $\widehat{BCD} = 60^\circ$  și  $\widehat{ACD} = 137^\circ$ .
17. Să se afle distanța dintre două blocuri turn,  $A$  și  $B$ , vizibile din două puncte  $C$  și  $D$ , situate pe aceeași stradă. Sînt cunoscute distanța  $CD = 120$  m, precum și unghiurile orizontale  $\widehat{ACD} = 72^\circ 14'$ ,  $\widehat{ADC} = 36^\circ 49'$ ,  $\widehat{CDB} = 68^\circ 16'$  și  $\widehat{BCD} = 41^\circ 40'$ .
18. Un avion zburînd la aceeași înălțime, păstrînd drumul și viteza constantă, măsoară în două momente unghiurile făcute de direcția de zbor, cu direcțiile la un obiectiv terestru. Știind că distanța parcursă de avion între cele două observații era de 1 800 m și că unghiurile luate au fost de  $37^\circ 14'$  și  $51^\circ 30'$ , se cere să se calculeze distanța ( $d$ ) dintre obiectiv și poziția avionului în momentul primei observații.
19. Să se găsească înălțimea unui deal  $MN$ , știind că s-a măsurat o bază orizontală  $AB = 88$  m; unghiurile razelor vizuale din  $A$  și  $B$  la vârful dealului cu  $AB$  sînt respectiv  $48^\circ 20' 32''$  și  $63^\circ 00' 06''$ . Unghiul făcut de  $MA$  cu verticala punctului  $A$  este de  $33^\circ 10'$ , iar înălțimea instrumentului 1,50 m.
20. Să se calculeze raza Pămîntului, știind că un observator ridicat la o înălțime de 17,64 m a găsit că raza vizuală tangentă la suprafața mării face cu orizontala un unghi de  $8'$ .
21. Pentru măsurarea înălțimii unei statui  $AB$ , așezată pe un soclu inaccesibil  $AC$ ; s-a măsurat o bază orizontală  $PR = 14$  m, situată în același plan cu  $AB$  și unghiurile  $\widehat{APC} = 22^\circ$ ,  $\widehat{BPC} = 32^\circ$ ,  $\widehat{BRP} = 20^\circ$ . Ce înălțime are statuia?
22. Un paratrăsnet  $AB = 8,264$  m este așezat pe o clădire a cărei înălțime este  $AC$ . Dintr-un punct  $P$  așezat la o depărtare de 82,656 m de piciorul clădirii și la o înălțime de 1,621 m deasupra terenului, paratrăsnetul se vede sub un unghi de  $4^\circ 27' 54''$ . Să se calculeze înălțimea clădirii.
23. Un turn  $AN$  și un copac  $BM$  se găsesc pe o cîmpie orizontală, la o distanță  $MN = 24$  m. De la piciorul turnului, copacul se vede sub un unghi vertical  $\alpha$ .

De la piciorul copacului, turnul se vede sub un unghi vertical  $2\alpha$ . Privind din mijlocul distanței  $MN$ , copacul și turnul se văd sub unghiuri verticale complementare. Se cere înălțimea copacului și a turnului.

24. Cunosându-se trei puncte  $A, B, C$  de pe o hartă, se cere să se găsească un punct  $M$ , interior triunghiului  $ABC$ , știind că  $AB = 354$  m,  $BC = 288$  m,  $\widehat{ABC} = 136^\circ 39' 54''$ ,  $\widehat{AMB} = 68^\circ 05' 12''$  și  $\widehat{BMC} = 53^\circ 44' 04''$ .
25. O persoană mergînd pe un drum în linie dreaptă observă că cel mai mare unghi sub care se văd două puncte date este  $\alpha$ ; din acest moment el mai face un drum  $a$ , pînă cînd cele două puncte se confundă și găsește că această direcție face unghiul  $\beta$  cu drumul. Se cere distanța dintre cele două puncte.

## Capitolul 1

1. 0,01745; 0,00029; 0,00145; 0,94248; 0,000145; 0,24799.
2.  $27^{\circ}41'32''$ ;  $30^{\circ}$  7691;  $75^{\circ}$ ;  $83^{\circ}33'$ ;  $252^{\circ}$ ;  $280^{\circ}$ .
3.  $57^{\circ}17'44,4''$ .
4.  $\frac{3,14159}{648\,000}$  rad.
5.  $75^{\circ}34'10,8''$ ;  $0,419831\pi$  rad.
6.  $131^{\circ}00'38,4''$ .
7.  $150^{\circ}7953$ ;  $0,754\pi$  rad.
8. 0,3184 rad.
9.  $42^{\circ}17'13,7''$ ; 478066.
10.  $128^{\circ}34'17''$ .
11.  $-22^{\circ}30'$ ;  $42^{\circ}$ .
12.  $117^{\circ}$ ;  $-81^{\circ}49'54''$ ;  $107^{\circ}01'37''$ .
13.  $\frac{17\pi}{36}$ .
14.  $\frac{4\pi}{5}$ ;  $160^{\circ}$ .
15. Se transformă în radiani; se obține  $\frac{7}{4}$ .
16.  $23^{\circ}30'$ ;  $46^{\circ}26'$ .
17.  $36^{\circ}45'$ ;  $14^{\circ}15'$ ;  $-0^{\circ}48'45''$ ;  $21^{\circ}41'15''$ .
18. 0,42 rad.
19. 6,53 m.
20.  $71^{\circ}39'$ .
21. 0,4683 rad;  $26^{\circ}50'42''$ .
22. 3,05 cm; 3,94 dm; 0,495 m.
23. 4,796 m.
24. 10,97 m.
25. 1,67 cm.
26.  $87^{\circ}46'$ ;  $65^{\circ}49'30''$ .
27. 3,75 rad;  $214^{\circ}51'52''$ .
28.  $\omega \approx 0,000072$  rad/s.
29. 200.
30.  $\frac{4\pi}{15}$  rad/s.
31. 9 s.
32.  $\frac{32\pi}{3}$  rad/s.
33. a)  $720^{\circ}$ ;  $4\pi$ ; b)  $840^{\circ}$ ;  $\frac{16\pi}{3}$ ; c)  $225^{\circ}$ ;  $\frac{5\pi}{4}$ .
34.  $10\pi$  rad/s; 37,68 m/s.
35.  $\frac{\pi}{21\,600}$  rad/s;  $\frac{\pi}{1\,800}$  rad/s;  $\frac{\pi}{30}$  rad/s.
36.  $\frac{7\pi}{18}$  rad;  $50^{\circ}$ ;  $55^{\circ}555$ .
37. 3 min; 27 min;  $3(4n - 3)$  min.
38. arc AN =  $144^{\circ}44'27''$ ; arc AP =  $215^{\circ}15'33''$ ; arc AR =  $324^{\circ}44'27''$ .

## Capitolul 2

1. a)  $\lg 10^{\circ} \sin 10^{\circ}$ ; b), c)  $1 \left( x \neq k \frac{\pi}{2} \right)$ .
2. a)  $T = \frac{\pi}{3}$ ; b)  $T = \pi$ ; c) neperiodică; d)  $T = 2\pi$ ; e) neperiodică.
3. a)  $\frac{\pi}{2}$ ; b)  $\frac{2\pi}{3}$ ; c)  $\pi$ . Ind. a)  $\sin^2 2x + \operatorname{ctg} 2x = \frac{1 - \cos 4x}{4} + \operatorname{ctg} 2x$ ; b) Se ține seama de

identitatea  $\sin 6x \cos 15x = \frac{1}{2} (\sin 21x - \sin 9x)$ , apoi se determină cele mai mici numere

care satisfac relația  $\frac{m2\pi}{21} = \frac{n2\pi}{9}$ .

$$5. 2\pi. \text{ Ind. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}, & \text{dacă } x \neq k\pi \\ 0, & \text{dacă } x = k\pi, \end{cases}$$

iar funcțiile  $\sin^2 nx$  și  $\sin x$  admit respectiv perioadele  $\frac{\pi}{n}$ ,  $2\pi$ .

$$6. n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15. \text{ Ind. Se ia } x = 0 \text{ în identitatea } \cos n(x + 3\pi) \cdot \sin \frac{5}{n}(x + 3\pi) = \cos nx \sin \frac{5}{n}x.$$

$$7. \text{ Ind. Luind în identitatea } \cos \sqrt{x+T} = \cos \sqrt{x}, x = 0 \text{ și } x = T \text{ se obține egalitatea } \sqrt{2} = \frac{l}{k} (l, k - \text{întregi}).$$

8. a) pară; b) pară; c) impară; d) pară; e) nici pară, nici impară.

9. Ind. Se scrie suma sub forma  $(a_1 \cos \alpha_1 + \dots + a_n \cos \alpha_n) \cos x - (a_1 \sin \alpha_1 + \dots + a_n \sin \alpha_n) \sin x$  și se arată că sumele din paranteze sînt nule.

$$10. a) \frac{9\pi}{14}; b) -\frac{\pi}{10}.$$

$$12. S_n = \arctg \frac{n}{n+1}. \text{ Ind. } S_1 = \arctg \frac{1}{2}, S_2 = \arctg \frac{2}{3}, S_3 = \arctg \frac{3}{4}. \text{ Demonstrația se face prin inducție completă.}$$

$$18. \arcsin \cos \arcsin x + \arccos \sin \arccos x = \frac{\pi}{2}. \text{ Ind. } \cos \arcsin x = \sin \arccos x = +\sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1).$$

14. Ind. Realizantul ecuației  $12\pi t^2 - 6\pi^2 t + (1 - 8\alpha)\pi^3 = 0$  ( $t = \arcsin x$ ) este negativ.

15. a)  $f(x) \in \left[\frac{1}{2} \sin 4, \frac{1}{2} \sin 2\right]$ ; b)  $f(x) \in \left[-1 - \frac{\pi}{2}, 1 + \frac{\pi}{2}\right]$ . Ind. a) Funcția este strict descrescătoare; b) Funcția este pară și strict monotonă.

$$16. \text{ Ind. } y = y_1 + y_2 = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ (fig. II, 13).}$$

$$17. \text{ Ind. } f(x) = \frac{1}{2} (\cos 2x - \cos 2\alpha) \text{ (fig. II, 14).}$$

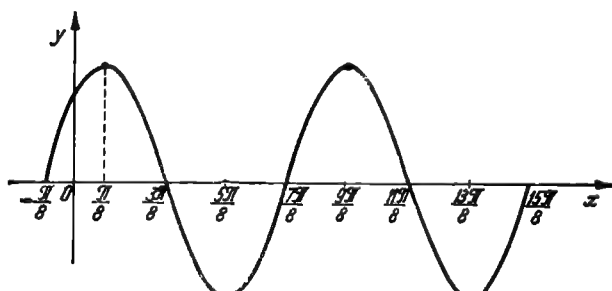


Fig. II, 13

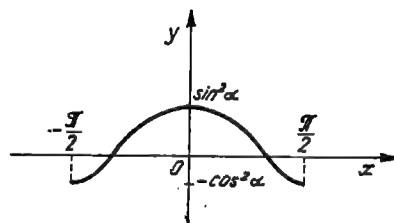


Fig. II, 14

19. Ind.  $f(x) = \begin{cases} k2\pi, \text{ dacă } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right], & (\text{fig. II, 16}) \\ 2x - (2k+1)\pi, \text{ dacă } x \in \left[\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right] \end{cases}$

20. a)  $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ ; b)  $\min f(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ . Ind. a)  $\sin x > 0$  și  $\sin x \cdot \frac{1}{\sin x} = 1$ .

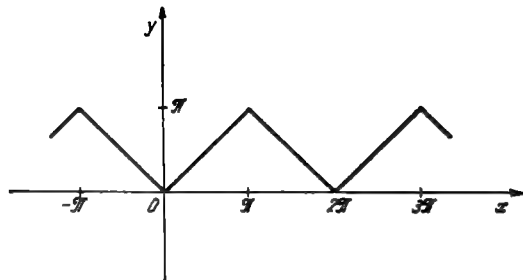
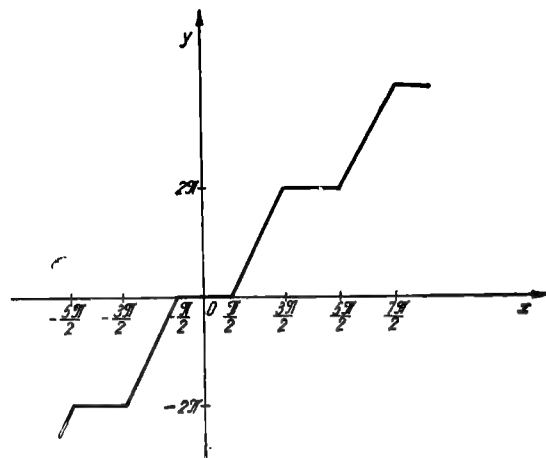


Fig. II, 15



F. II, 16

21. Ind.  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 - \frac{2 \cos(x+y)}{\cos(x-y) + \cos(x+y)}$ .

22.  $\min U = 2a \sqrt{1-a}$  și se obține pentru  $\cos(x+y) = \cos(x-y) = \sqrt{1-a}$ ;  $\max U = a(2-a)$  și se obține pentru  $\cos x = \cos y = \sqrt{\frac{2-a}{2}}$ .

Ind.  $U = 2a \cos x \cos y = a[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$ , unde  $\cos(x+y) > 0$ ,  $\cos(x-y) > 0$  și  $\cos(x+y) \cos(x-y) = 1-a$ ;  $U^2 = 4a^2 \cos^2 x \cos^2 y$  și  $\cos^2 x + \cos^2 y = 2-a$ .

23. Triunghiul isoscel. Ind. Dacă  $a = BC$  este baza triunghiului, atunci

$$b + c = \frac{a}{\sin \frac{A}{2}} \cos \frac{B-C}{2} \quad (\text{fig. II, 17}).$$

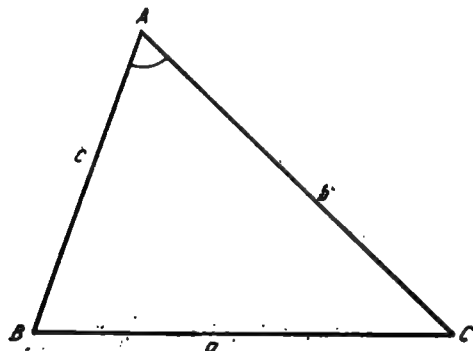


Fig. II, 17

24. Triunghiul dreptunghic isoscel. Ind.  $S = \frac{2R^2}{\sin 2\alpha}$  (fig. II, 18).

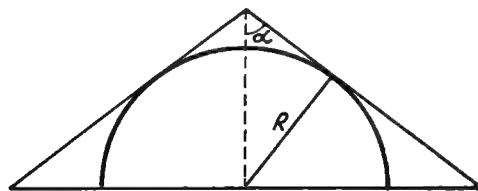


Fig. II, 18

25.  $x = \frac{\alpha}{2}$ . Ind.  $S = \frac{R^2}{\sin \alpha} [\cos (2x - \alpha) - \cos \alpha]$  (fig. II, 19).

26.  $M$  este mijlocul arcului  $\widehat{AB}$ ;  $M$  coincide cu extremitățile arcului  $\widehat{AB}$ .

Ind.  $S = \frac{R^2}{2} \left[ \frac{\pi}{2} - \sqrt{2} \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right]$  (fig. II, 20).

27.  $a(1 + \sqrt{2})$ . Ind.  $2p = a \left[ 1 + \sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right) \right]$ .

28.  $x = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$  dacă cercurile sînt tangente exterioare;  $x = \frac{\alpha}{2}$  dacă cercurile sînt tangente in-

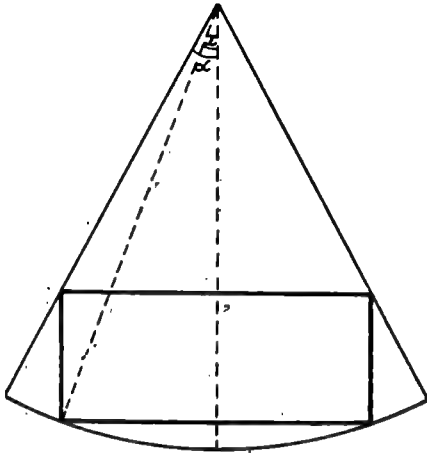


Fig. II, 19

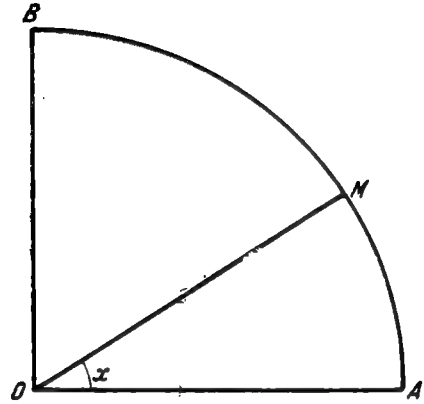
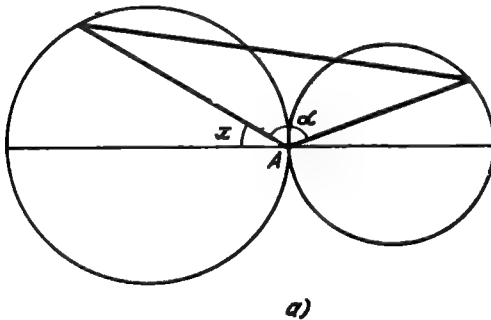


Fig. II, 20

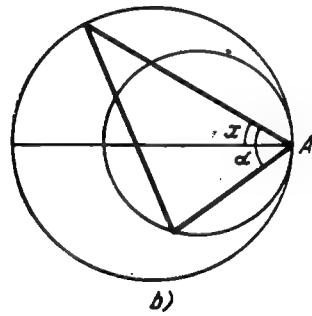
terioare. Ind.  $S = 2Rr [\cos (\pi - \alpha) + \cos (\pi - \alpha - 2x)]$  și  $S = 2Rr [\cos \alpha + \cos (\alpha - 2x)]$  (fig. II, 21).

29.  $2R^2 - d^2$ . Ind.  $S = 2 \sqrt{(R^2 - d^2 \sin^2 x)(R^2 - d^2 \cos^2 x)}$  și suma factorilor de sub radical este constantă (fig. II, 22).

30.  $x = \sqrt{ab}$ . Ind.  $\varphi = \arctg \frac{b - a}{x + \frac{ab}{x}}$  (fig. II, 23).



a)



b)

Fig. II, 21

31.  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ . Ind.  $S = 2\pi (x^2 + 2xy) = 2\pi R^2 \cos (2x - \varphi)$ , unde  $\varphi = \operatorname{arctg} 2$  (fig. II, 24).

32. Triunghiul dreptunghic isoscel. Ind.  $V = \frac{4}{3} \pi a^3 \sin^2 2\alpha$ ,  $\alpha$  fiind unul dintre unghiurile ascuțite ale triunghiului.

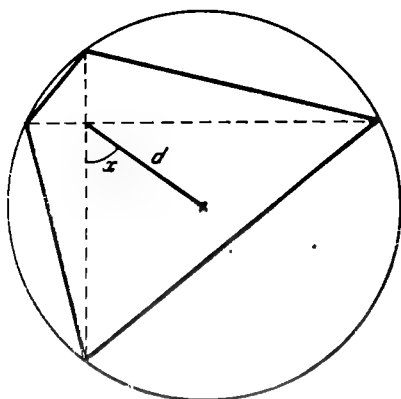


Fig. II, 22

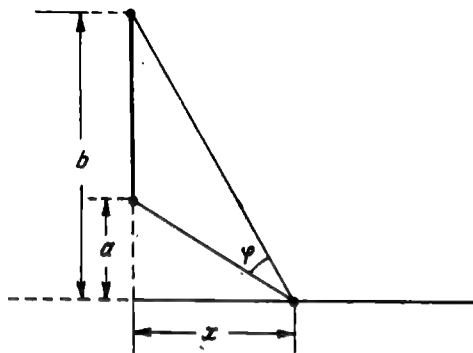


Fig. II, 23

33.  $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ . Ind.  $V = \frac{4}{3} \pi a^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha$ ,  $\alpha$  fiind semiunghiul de la vârful triunghiului.

34.  $x = \operatorname{aresin} \sqrt{\frac{2}{3}}$ . Ind.  $S = 4\pi R^2 \sin^2 x \cos x$ .

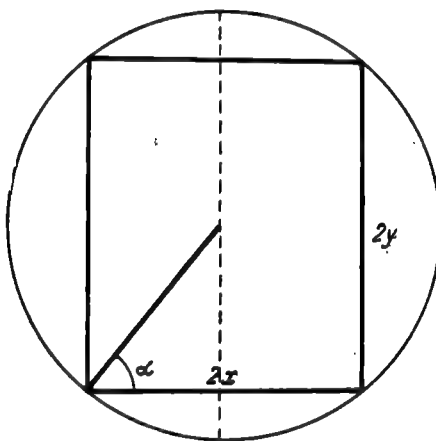


Fig. II, 24

### Capitolul 3

#### A. Aplicații ale formulelor 1-4

1.  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{3\sqrt{7}}{7}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{3}$ .

2.  $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{91}}{10}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{3\sqrt{91}}{91}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \mp \frac{\sqrt{91}}{3}$ .

$$3. \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{11}}{6}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{11}}{5}; \operatorname{ctg} \alpha = \pm \frac{5\sqrt{11}}{11}.$$

$$4. \sin \alpha = \pm \frac{4}{5}; \operatorname{tg} \alpha = \mp \frac{4}{3}; \operatorname{ctg} \alpha = \mp \frac{3}{4}.$$

$$5. \sin \alpha = \pm \frac{7\sqrt{113}}{113}; \cos \alpha = \pm \frac{8\sqrt{113}}{113}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{8}{7}.$$

$$6. \sin \alpha = \pm \frac{9}{41}; \cos \alpha = \pm \frac{40}{41}; \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{40}{9}.$$

$$7. \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{7}}{7}; \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{42}}{7}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

$$8. \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}; \cos \alpha = \pm \frac{3\sqrt{10}}{10}; \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}.$$

$$9. \sin \alpha = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}; \cos \alpha = \frac{1}{3}; \operatorname{tg} \alpha = \pm \sqrt{8}.$$

$$10. \cos \alpha = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

$$11. \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{2} - 1.$$

31. Se lucrează în membrul stâng, înlocuindu-se tangenta și cotangenta în funcție de sinus și cosinus.

37. b) Se aplică relația:

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha).$$

41. Ridicăm relația  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  la diferite puteri. Se obține 1.

43.  $E = \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2$ . Se înlocuiește 1 cu  $(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2$  sau  $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$

$$\text{și } \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$44. E(\alpha) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{|\sin \alpha| |\sin \alpha|} - 1 \right),$$

deci:

$$E(\alpha) = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1 \right) = \sqrt{2} \operatorname{ctg}^2 \alpha \text{ pentru } \alpha \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \text{ și } E(\alpha) =$$

$$= -\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sin^2 \alpha} + 1 \right) = -\sqrt{2} (\operatorname{ctg}^2 \alpha + 2) \text{ pentru } \alpha \in ((2k+1)\pi, 2k\pi).$$

45. Punem expresia dată sub forma:  $E = (m \operatorname{tg} \alpha - n) \cos \alpha$ .

Se calculează  $\cos \alpha$  și făcând înlocuirile obținem  $E = \pm n$ .

B. Aplicații ale formulelor 5—16

$$46. -0,996; 0,829; -0,087; 0,558.$$

$$47. 0,097; -1,306.$$

$$48. 2 + \sqrt{3}.$$

$$49. \frac{1}{10} \left( 3 + 4\sqrt{3} \right); \frac{1}{10} \left( 3\sqrt{3} - 4 \right).$$

$$50. \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}.$$

$$12. \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$13. \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}.$$

$$14. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$15. \sin \alpha = \frac{\sqrt{30}}{6}; \sec \alpha = \sqrt{6}.$$

$$17. 1 + \cos \alpha.$$

$$18. 2 \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$19. a) \operatorname{ctg}^2 \alpha; b) \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$20. 1.$$

$$21. \sec^2 \alpha.$$

$$22. \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$23. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

$$24. \operatorname{ctg}^2 \alpha.$$

$$25. a) \operatorname{cosec}^2 \alpha; b) \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$26. a) 2 |\operatorname{cosec} \alpha|; b) 4 \operatorname{tg}^2 \alpha.$$

$$51. \frac{1 - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \beta}.$$

$$52. \frac{4 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

$$53. \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

$$54. -2\sqrt{3}.$$



$$55. \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$56. \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

$$57. 2 - \sqrt{3}.$$

$$58. 2 + \sqrt{3}.$$

$$59. -1.$$

$$62. b) \text{ Se observă că } \alpha = (\alpha - \beta) + \beta.$$

C. Aplicații ale formulelor 17-34

$$61. 0,96; 0,28; \frac{24}{7}.$$

$$82. \sqrt{5} - 2.$$

$$83. 0,792.$$

$$84. 0,568.$$

$$85. 0,9952; 0,1788.$$

$$86. \frac{1}{2}; -3.$$

$$87. \frac{3}{\sqrt{10}}; -\frac{1}{\sqrt{10}}; -3.$$

$$89. \frac{70}{161}; \frac{7}{24}.$$

$$90. \pm \frac{21}{29}; \pm \frac{20}{29}.$$

91. Se va proceda ca în problema rezolvată nr. 37.

$$92. 4 \sin \alpha \cos^3 \alpha - 4 \sin^3 \alpha \cos \alpha; 5 \sin \alpha - 20 \sin^2 \alpha + 16 \sin^3 \alpha;$$

$$32 \sin \alpha \cos^5 \alpha - 32 \sin \alpha \cos^3 \alpha + 6 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$93. 4 \sin^4 \alpha + 4 \cos^4 \alpha - 3; 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha.$$

94. Aplicându-se formulele (17), (18), (25), (26) se găsește:

$$\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}}; \frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}.$$

95. Aplicându-se formulele (17), (27') și (22) se găsește:

$$2m \sqrt{1 - m^2}; \frac{m}{1 + \sqrt{1 - m^2}}; (1 - 4m^2) \sqrt{1 - m^2}.$$

96. Aplicându-se formulele (29), (30), (31) se găsește:

$$\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

97. Se aplică formulele  $\sin 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ,  $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$  și formula (19); se găsește:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; -1.$$

$$98. \sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha \text{ și } \sin^4 \alpha = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\alpha + \frac{1}{8} \cos 4\alpha.$$

$$99. a) \frac{1}{8} \sin 8x; b) \sec \alpha; c) \text{ notăm } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = t, \text{ deci } \sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2} \text{ și } \cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}. \text{ Înlo-}$$

$$\text{cuind, se obține: } E_3 = \frac{1}{4} \sec^4 \frac{\alpha}{2}.$$

$$104. \text{ Lucrăm în membrul drept: } \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{(\cos \alpha + \sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \dots \text{ ș.a.m.d.}$$

$$105. \text{ Scriem membrul stâng sub forma: } \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos 3\alpha}{\cos \alpha} = \dots \text{ aplicăm formulele (21) și (22) și}$$

efectuăm calculele.

$$106. \text{ Înlocuim în membrul drept: } \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad 1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha, \quad 1 + \cos \alpha =$$

$$= 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \text{ și efectuăm calculele.}$$

120. Eliminăm numitorii. Deci:  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \sin 2\alpha \operatorname{cosec} 2\alpha - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha \dots$  ș.a.m.d.

Se obține  $1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ .

121. Se lucrează în membrul drept aplicând formulele:  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$  și  $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$ .

122. Se lucrează în membrul stâng aplicându-se formula (23).

#### D. Aplicații ale formulelor 35–63

127.  $\sqrt{1,5}$ ;  $\sin 18^\circ$ ; 0;  $-\sin 18^\circ$ .

128.  $2 \cos 30^\circ \cos 15^\circ$ ;  $\frac{\sin 56^\circ}{\cos 21^\circ \cos 35^\circ}$ ;  $\sqrt{2} \frac{\cos 2^\circ 52'}{\cos 42^\circ 08'}$ .

129.  $\sqrt{2} \cos \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ ;  $\sqrt{2} \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)$ ;  $\frac{2 \sin \left( \alpha - \frac{\pi}{4} \right)}{\sqrt{2} \cos \alpha}$ ;  $\frac{\sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)}{\cos \alpha}$ .

130.  $2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{3\alpha}{2} \right)$ ;  $2 \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{6} \right)$ ; se notează  $a \operatorname{tg} \varphi = b \operatorname{tg}^3 \alpha$ , se obține:  $\frac{a \cos^3 \alpha \cos (\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}$ .

131.  $\sqrt{8} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ ;  $-4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \alpha$ ;  $\frac{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$ ;  $\frac{\sqrt{8} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}$ ;

Se scrie:  $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)}{\cos \alpha}$  și se obține:  $\frac{2 \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \alpha \right) \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}$ .

132.  $\cos \alpha$ ;  $2 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}$ .

133.  $\frac{\sin (\alpha + \beta) \sin (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$ ;  $-\frac{\cos (\alpha + \beta) \cos (\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \sin^2 \beta}$ .

134.  $2 \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2} \right)$ ;  $2 \sin \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

135.  $4 \cos \alpha \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ ;  $4 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \sin \frac{\gamma + \alpha}{2}$ ;  $4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$   
(v. aplicația nr. 63).

136.  $2 \operatorname{tg} \alpha \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ ;  $2 \operatorname{tg} \alpha \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ .

137.  $\frac{1}{4} \sec^2 \alpha$ .

138.  $\frac{\cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}$ ;

$\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ .

139. Se face notația  $\frac{m \sin \alpha}{n \cos \beta} = \operatorname{tg} \varphi$  și se obține:  $\frac{\sin \alpha \sin (\varphi - \beta)}{\cos \beta \sin (\varphi - \alpha)}$ .

140. Se împart termenii fracției cu  $b$  și se notează  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$ ; se obține:

$$\frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \left( \varphi - \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\pi + \alpha}{2} \sin \left( \varphi - \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}.$$

141. Vezi aplicația nr. 65; se obține:  $\frac{\cos \left[ \alpha + \frac{(n-1)h}{2} \right] \sin \frac{nh}{2}}{\sin \frac{h}{2}}; \frac{\cos 2\alpha \sin \frac{3\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$  sau

$$4 \cos 2\alpha \cos \left( \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right).$$

142.  $2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{12}$ ; se scrie:  $2 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \left( \sqrt{1 + \frac{\cos \alpha}{4}} + \sqrt{1 - \frac{\cos \alpha}{4}} \right)$ ; se notează  $\cos \varphi = \frac{\cos \alpha}{4}$  și se obține  $4 \sqrt{\operatorname{tg} \alpha} \sin \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ .

148.  $-\frac{1}{2}$ .

145. a) Se aplică formula (47); b) Se înmulțesc ambii membri cu  $\sin \frac{\pi}{2}$  și se transformă produsele în diferențe de sinusuri.

146. Se lucrează în ambii membri, făcând  $\cos 15^\circ = \sin 75^\circ$ ;  $\cos 5^\circ = \sin 85^\circ$  ș.a.m.d. Se obține în ambii membri  $\sqrt{3}$ .

148. Se transformă produsele în diferențe:  $\sin (\alpha - \beta) \cos (\alpha + \beta) = \frac{1}{2} (\sin 2\alpha - \sin 2\beta)$  ș.a.m.d.

159. Avem  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha$ ; de asemenea,  $2 \operatorname{tg} 2\alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha = -4 \operatorname{ctg} 4\alpha$  ș.a.m.d.

160. Se elimină numitorul. Se lucrează în membrul sting, transformându-se produsele în diferențe de sinusuri.

161. Se lucrează în ambii membri:  $\sin 3\alpha - \sin 5\alpha = -2 \sin \alpha \cos 4\alpha$  ș.a.m.d. Se obține în ambii membri  $\operatorname{tg} \alpha$ .

177.  $4 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\gamma + \alpha}{2}$ .

182. Facem  $\cos \left( \alpha + \frac{\pi}{2} \right) = -\sin \alpha$ ,  $\cos \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \alpha - \sin \alpha)$  ș.a.m.d.

191.  $-\frac{2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} 3\alpha}{\cos 2\alpha}$ .

195.  $S_1 = \frac{n+1}{2} - \frac{\cos n\alpha \sin (n+1)\alpha}{2 \sin \alpha}$ .

199. Avem succesiv:  $3 - 2 \cos (\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha - 2 \sin \beta \geq 0$  sau  $1 + 2 [1 - \cos (\alpha + \beta)] - 2 (\sin \alpha + \sin \beta) \geq 0$  ș.a.m.d.

200. Soluția 1°. Inegalitatea propusă se scrie:  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}} \leq$

$$\leq \frac{1}{2} \left( \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} + \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}} \right) \text{ sau, notînd } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = x \text{ și } \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = y, x \text{ și } y \text{ fiind pozitive}$$

subunitare, obținem:  $\frac{x+y}{1-xy} \leq \frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2}$  ș.a.m.d.

Soluția 2°. Inegalitatea se poate scrie:  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{2 \cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}$  și, deoarece

$$0 \leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2} < 1, \text{ prin împărțire, relația devine: } \frac{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \alpha \cos \beta} \geq \frac{1}{\cos \frac{\alpha + \beta}{2}} \text{ ș.a.m.d.}$$

## Capitolul 4

1.  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\} \cup \{ \pi + k2\pi \}$ . *Ind.* Funcția din membrul stîng al ecuației este periodică, cu perioada egală cu lungimea intervalului  $[0, 2\pi]$ .
2.  $x_2$  este rădăcină a ecuației respective. *Ind.* Funcțiile din membrul stîng al ecuațiilor date sînt periodice, cu perioada  $2\pi$  și  $\pi$  respectiv, iar  $9 \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + 2 \cdot 2\pi, 4\pi = \pi + 3\pi$ .
3.  $x = \left\{ \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2} \right\} \cup \{ k\pi \}$ . *Ind.* Exprîmînd  $\sin 3x$  prin  $\sin x$  se obține ecuația echivalentă  $3 \sin x (1 - 2 \sin^2 x) = 0$ .
4.  $x = \{ k\pi \} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ .
5. a)  $x = k \frac{\pi}{4}$ . *Ind.* Grupînd convenabil termenii, ecuația se poate scrie sub forma  $4 \sin 4x \cos 2x \cos x = 0$ ; b)  $x = \{ k\pi \} \cup \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + k\pi \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \right\}$ .
6.  $x = -\frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{2}$ . *Ind.* După transformări, se obține ecuația echivalentă  $\operatorname{tg} 2x = -1$ .
7.  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ .
8.  $x = \{ k 180^\circ \} \cup \{ \pm \operatorname{arctg} \sqrt{11} + k 180^\circ \}$ .

9.  $\sin x = 0$ ,  $\cos x = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = k2\pi, \\ -1, & \text{dacă } x = (2k+1)\pi; \end{cases}$   
 $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , dacă  $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ;  $\sin x = \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ , dacă  $x = \frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ ;  $\sin x = -\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , dacă  $x = 3\frac{\pi}{4} + k2\pi$ ;  $-\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , dacă  $x = 7\frac{\pi}{4} + k2\pi$ .
10. a)  $x = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k2\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \right\}$ ; b)  $x = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ . *Ind.* Se obține ecuația echivalentă  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin 3x$ .
11.  $x = (-1)^k 2 \arcsin \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} + k2\pi$ . *Ind.* Se rezolvă ecuația  $\cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$ .
12. a)  $x = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ ; b)  $x = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \{k2\pi\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ .  
*Ind.* Ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $(\cos x + \sin x) \left[ \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \right] = 0$ ;  
c)  $x = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$ .
13. a)  $x = \pm \arccos(-1 + \sqrt{2}) + k2\pi$ . *Ind.* Ecuația se poate scrie sub forma echivalentă  $\cos^2 x + 2 \cos x - 1 = 0$ ; b)  $x = \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ ; c)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ . *Ind.* Ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $7 \cos^2 2x - \cos^3 2x = 0$ .
14.  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ . *Ind.* Se rezolvă ecuația echivalentă  $\cos 2x (2 \cos^2 x + 1) = 0$ .
15. a)  $x = \{ \pm 60^\circ + k 180^\circ \} \cup \{ \pm 35^\circ 15' 51'' + k 180^\circ \}$ ; b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ . *Ind.* Ecuația se poate scrie sub forma echivalentă  $\sin^3 2x + 7 \sin^2 2x - 8 = 0$ , de unde  $\sin 2x = 1$ .
16. a)  $x = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \right\}$ . *Ind.* Se rezolvă ecuația echivalentă  $8 \cos x (\sin x - \cos x) = 0$ ; b)  $x = k\frac{\pi}{4}$ . *Ind.* Ecuația se poate scrie sub forma echivalentă  $(\sin x - \cos x) (\sin x + \cos x) \sin^2 x \cos^2 x = 0$ .
17. a)  $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$ . *Ind.* Se obține ecuația echivalentă  $24 \cos^4 2x - 10 \cos^2 2x - 1 = 0$ ;  
b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ . *Ind.* Se rezolvă ecuația echivalentă  $\sin^2 2x = 1$ .
18.  $x = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ .
19. a)  $x = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \right\} \cup \left\{ (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin 2(-1 + \sqrt{2}) + k\frac{\pi}{2} \right\}$ ; b)  $x = \left\{ k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \pm \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ . *Ind.* Se obține ecuația echivalentă  $\operatorname{tg} 2x \left( \frac{1}{\cos 4x} - 1 \right) = 0$ .
20. a)  $x = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + (2k+1)\pi \right\}$ . *Ind.* Ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $\cos x = \sin 2x (\cos x \neq 0)$ ; b)  $x = \left\{ \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2} \right\} \cup \left\{ \frac{5\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}$ . *Ind.* Fiindcă  $x \neq k\frac{\pi}{4}$ , ecuația dată este echivalentă cu ecuația  $\sin 4x = \frac{1}{2}$ .

21. a)  $x = \left\{ \frac{\pi}{10} + k \frac{2\pi}{5} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$ . *Ind.* Fiindcă  $x \neq k \frac{\pi}{3}$ , se obține ecuația echivalentă  $\cos 2x = \cos \left( \frac{\pi}{2} - 3x \right)$ ; b)  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ . *Ind.* Funcția din membrul sting al ecuației nu are sens pentru  $x = k \frac{\pi}{2}$ ; c) Nu are rădăcini.
22.  $a = \sqrt{2}$ ;  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ . *Ind.* Se scrie ecuația sub forma echivalentă  $\cos \left( x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{a^2}{2}$ .
23.  $x = \pm \arccos \frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2} + k2\pi$ , dacă  $m \in [2, +\infty)$ ;  $x = \pm \arccos \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} + k2\pi$ , dacă  $m \in (-\infty, -2]$ . Pentru  $m \in (-2, 2)$ , ecuația nu admite rădăcini. *Ind.* Se scrie ecuația sub forma echivalentă  $\cos^2 x - m \cos x + 1 = 0$ .
24.  $x = \left\{ \pm \arccos \sqrt{\frac{m}{2}} + k2\pi \right\} \cup \left\{ \pm \arccos \left( -\sqrt{\frac{m}{2}} \right) + k2\pi \right\} \cup \{k\pi\}$ , dacă  $m \in (0, 2]$  și  $x = k\pi$ , dacă  $x \in (-\infty, 0] \cup (2, +\infty)$ . *Ind.* În ipoteza că  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , ecuația dată se poate scrie sub forma echivalentă  $\sin x \left( \cos^2 x - \frac{m}{2} \right) = 0$ .
25.  $x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{2}{\pm \sqrt{m^2 + 2}} + k \frac{\pi}{2}$ , dacă  $m \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, +\infty)$ . *Ind.* Se scrie ecuația sub forma echivalentă  $\sin^2 2x = \frac{4}{m^2 + 2}$  și se ține seama de inegalitatea  $|\sin \alpha| \leq 1$ .
26.  $x = \pm \arccos \frac{3(m-1) - \sqrt{9m^2 - 10m + 25}}{4} + k2\pi$ , dacă  $m \in \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right)$ ;  $x = \pm \arccos \frac{3(m-1) + \sqrt{9m^2 - 10m + 25}}{4} + k2\pi$ , dacă  $m \in \left( -\infty, \frac{3}{4} \right]$ . Pentru  $m \in \left( \frac{3}{4}, \frac{3}{2} \right)$ , ecuația nu are soluții. *Ind.* Vezi problema 42 (rezolvată).
27.  $x = \left\{ \pm \arccos \frac{2m+1 - \sqrt{-4m^2+5}}{2(2m^2+m-1)} + k2\pi \right\} \cup \left\{ \pm \arccos \frac{2m+1 + \sqrt{-4m^2+5}}{2(2m^2+m-1)} + k2\pi \right\}$  dacă  $m \in \left\{ -\frac{1}{2} \right\} \cup \left[ 1, \frac{\sqrt{5}}{2} \right]$ ;  $x = \pm \arccos \frac{2m+1 - \sqrt{-4m^2+5}}{2(2m^2+m-1)} + k2\pi$ , dacă  $m \in \left( -1, -\frac{1}{2} \right) \cup \left( \frac{1}{2}, 1 \right)$ ;  $x = \pm \arccos \frac{2m+1 + \sqrt{-4m^2+5}}{2(2m^2+m-1)} + k2\pi$ , dacă  $m \in \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ ;  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ , dacă  $m = \frac{1}{2}$ ;  $x = (2k+1)\pi$ , dacă  $m = -1$ . *Ind.* Se discută ecuația echivalentă  $f(t) = (2m^2 + m - 1)t^2 - (2m + 1)t + 1 = 0$ , unde  $t = \cos x$ .
28.  $x = \frac{\pi}{4} + (k+l)\pi$ ,  $y = -\frac{\pi}{12} + (k-l)\pi$ ;  $x = -\frac{\pi}{12} + (k+l)\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi$ ;  $x = \frac{7\pi}{12} + (k+l)\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + (k-l)\pi$ ,  $y = \frac{7\pi}{12} + (k+l)\pi$ . *Ind.* Se rezolvă sistemul echivalent  $\sin(x+y) = \cos(x-y) = \frac{1}{2}$ .

29. a)  $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + k\pi$ ,  $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + l\pi$ ; b)  $x = \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + k\pi \right\} \cup \left\{ \pm \frac{1}{2} \arccos \left( -\frac{1}{4} \right) + k\pi \right\}$ ;  $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .
30.  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ ,  $y = -\frac{5\pi}{12} + l\pi$ . *Ind.* Sistemul dat este echivalent cu sistemul  $\operatorname{tg} x = 2 - \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg} y = -(2 + \sqrt{3})$ .
31.  $x = \frac{\pi}{6} + (4k-l)\frac{\pi}{5}$ ,  $y = \frac{\pi}{6} + (-2k+3l)\frac{\pi}{5}$ ;  $x = \frac{5\pi}{14} + (-4k+l)\frac{\pi}{7}$ ,  $y = \frac{\pi}{14} + (2k+3l)\frac{\pi}{7}$ .
32.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ ,  $y = \frac{\pi}{4} + k\pi$ ;  $x = -\operatorname{arctg} (3 + 2\sqrt{3}) + k\pi$ ,  $y = -\frac{\pi}{12} - \operatorname{arctg} (3 + 2\sqrt{3}) + k\pi$ . *Ind.* Substituind valoarea lui  $y$  din prima ecuație a sistemului în a doua, se obține ecuația  $(2 - \sqrt{3}) \operatorname{tg}^2 x + (3 - \sqrt{3}) \operatorname{tg} x - 3 = 0$ .
33.  $x = \frac{a}{2} + (-1)^k \arcsin \frac{b}{\sin a} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2} + (-1)^{k+1} \arcsin \frac{b}{\sin a} - k\frac{\pi}{2}$ , dacă  $\sin a \neq 0$  și  $\left| \frac{b}{\sin a} \right| \leq 1$ ; dacă  $\sin a = b = 0$ , sistemul se reduce la ecuația  $x + y = k\pi$ ; dacă  $\sin a = 0$  și  $b \neq 0$ , sistemul este incompatibil.
34.  $x = \frac{\alpha}{2} + k\pi$ ,  $y = -\frac{\alpha}{2} + k\pi$ , dacă  $\cos \alpha = \frac{1}{2}$ ;  $x = \frac{\alpha}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ ,  $y = -\frac{\alpha}{2} + \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi$ , dacă  $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$ . Dacă  $|\cos \alpha| \neq \frac{1}{2}$ , sistemul este incompatibil. *Ind.* Se scrie a doua ecuație sub forma  $4 \cos \alpha \cos (x + y) = 1 + 4 \cos^2 \alpha$  și se ține seama de inegalitățile  $|4 \cos \alpha \cos (x + y)| \leq 4 |\cos \alpha| \leq 1 + 4 \cos^2 \alpha$ .
35.  $\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}$ ,  $\sin \beta = \pm \frac{1}{A} \sqrt{\frac{A^2-B^2}{1-B^2}}$ , dacă  $A^2 (1-B^2) \neq 0$ ;  $\cos \alpha = \pm 1$ ,  $\sin \beta$  — nedeterminat, dacă  $A = 0$ . Dacă  $B^2 = 1$ , problema își pierde sensul. *Ind.* Ținând seama de prima relație, a doua se poate scrie sub forma  $\sin \beta (A \cos \beta - B \cos \alpha) = 0$ .
36.  $0 < a^2 + b^2 \leq 1$ ,  $c = \frac{(a^2 + b^2)^2 - b^2}{(a^2 + b^2)^2 - a^2}$ ;  $a = b = 0$ ,  $c \geq 0$ . *Ind.* Sistemul dat admite cel puțin o soluție atunci și numai atunci când sistemul  $\cos (x - y) = 2(a^2 + b^2) - 1$ ,  $(a^2 + b^2) \cos (x + y) = b^2 - a^2$ ,  $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = c$  admite cel puțin o soluție.
37.  $x = \frac{1}{2} [\pm \arccos (b - a) \pm \arccos (b + a)] + (k + l)\pi$ ,  $y = \frac{1}{2} [\pm \arccos (b - a) \mp \pm \arccos (b + a)] + (k - l)\pi$ , dacă  $-1 \leq a \leq 0$  și  $-a - 1 \leq b \leq a + 1$ , sau  $0 \leq a \leq 1$  și  $a - 1 \leq b \leq -a + 1$ . *Ind.* Sistemul dat este echivalent cu sistemul  $\cos (x + y) = b - a$ ,  $\cos (x - y) = b + a$ .
38.  $x = \pm \arccos \frac{m^2}{4 - m^2} + k2\pi$ ,  $y = \pm \arccos \frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + l2\pi$  (semnele corespund) și  $x = k2\pi$ ,  $y = (2l + 1)\pi$ , dacă  $m \in [0, \sqrt{2}]$ ;  $x = \pm \arccos \frac{m^2}{4 - m^2} + k2\pi$ ,  $y = \mp \arccos \frac{4 - 3m^2}{4 - m^2} + l2\pi$  (semnele corespund) și  $x = k2\pi$ ,  $y = (2l + 1)\pi$ , dacă  $m \in [-\sqrt{2}, 0]$ ;  $x = k2\pi$ ,  $y = (2l + 1)\pi$ , dacă  $m \in (-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$ . *Ind.* Ținând seama de identitatea  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , se obține ecuația  $(m^2 - 4) \cos^2 x + 4 \cos x - m^2 = 0$ .

39.  $x = \alpha + (k + 2l)\pi$ ,  $y = (k - 2l)\pi$ ;  $x = (k + 2l)\pi$ ,  $y = \alpha + (k - 2l)\pi$  dacă  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$  și  $k$  este număr par;  $x = \alpha + (k + 2l + 1)\pi$ ,  $y = (k - 2l - 1)\pi$ ;  $x = (k + 2l - 1)\pi$ ,  $y = \alpha + (k - 2l + 1)\pi$  dacă  $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$  și  $k$  este număr impar; dacă  $\cos \frac{\alpha}{2} = 0$ , sistemul este echivalent cu ecuația  $x - y = (2k + 1)\pi$ . *Ind.* Se scrie sistemul sub forma echivalentă  $\sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .
40.  $m^3 - 3m + 2n = 0$ . *Ind.* Adăugând la ecuațiile sistemului identitatea  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ,  $\sin x$  și  $\cos x$  pot fi considerate rădăcinile ecuației  $t^2 + pt + q = 0$ , cu condiția ca  $m = -\frac{p}{2}$ ,  $1 = p^2 - 2q$ ,  $n = -p^3 + 3pq$ .
41.  $(2y^2 + x - 2)^2 + x^2(4x - 5) = 0$ . *Ind.* Se elimină unghiul  $a$  din ecuațiile sistemului echivalent  $\frac{1}{4} \cos^2 a - 2y \cos a - (x + 1) = 0$ ,  $\frac{1}{4} \cos^2 3a - 2y \cos 3a - (x + 1) = 0$ .
42.  $(a^2 + b^2) \cos \alpha = 2b$ .
43.  $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;  $x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{6}$ ,  $y_2 = \frac{2 + \sqrt{14}}{6}$ ;  $x_3 = \frac{-2 - \sqrt{14}}{6}$ ,  $y_3 = \frac{-2 + \sqrt{14}}{6}$ . *Ind.* Din prima ecuație rezultă că  $x \in [-1, 0]$  și  $y \in [0, 1]$ . În aceste condiții, sistemul considerat este echivalent cu următorul:  $\sqrt{1 - y^2} = -x$ ,  $x + y = \frac{2k}{3}$  ( $k = 0, \pm 1$ ).
44. a)  $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$ ; b)  $x \in \left[\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi\right]$ ; c)  $x \in \left(\arctg 2 + k\pi\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ ; d)  $x \in \left(k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi\right)$ ; e)  $x \in R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ .
45.  $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k2\pi, 3\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$ . *Ind.* Se rezolvă inecuația echivalentă  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 0$ .
46.  $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k\pi, 3\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ . *Ind.* Funcțiile din ambii membri ai inegalității admit perioada  $\pi$ .
47. a)  $x \in \left(\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right) \cup \left(5\frac{\pi}{6} + k\pi, \pi + k\pi\right)$ . *Ind.* Se scrie inecuația sub forma echivalentă  $\sin x \cos 3x < 0$  și se ține seama că funcția  $\sin x \cdot \cos 3x$  admite perioada  $\pi$ ;  
b)  $x \in \left(k3\pi, \frac{\pi}{2} + k3\pi\right) \cup \left(3\frac{\pi}{2} + k3\pi, 5\frac{\pi}{2} + k3\pi\right)$ . *Ind.* Se rezolvă inecuația echivalentă  $\frac{\sin \frac{2x}{3}}{\cos x \cos \frac{x}{3}} > 0$  în intervalul  $[0, 3\pi]$ , de lungime egală cu perioada funcției din membrul stâng al inegalității.
48.  $x \in \left(\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{3} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \frac{3\pi}{4} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + k2\pi, \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(5\frac{\pi}{3} + k2\pi, 7\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$ . *Ind.* Se determină soluțiile inecuației echivalente  $\cos x (2 \cos x - 1) (2 \cos^2 x - 1) < 0$ , aparținând intervalului  $[0, 2\pi]$ .



49.  $x \in \left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}\right)$ . Ind. Inecuația dată este echivalentă cu inecuația

$$\cos 4x > \frac{1}{2}.$$

50.  $x \in \left(k2\pi, \frac{\pi}{2} + k2\pi\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + k2\pi, \pi + k2\pi\right)$ . Ind. Se rezolvă inecuația echivalentă.

$$\frac{1 - \sin x}{\sin x} > 0.$$

51.  $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{4\pi}{3} + k2\pi\right)$ . Ind. Dacă  $\varphi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ , inecuația dată este echivalentă cu sistemele  $(\operatorname{tg} \varphi - \sqrt{3})(\operatorname{tg}^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 4) > 0, \cos \varphi > 0$  și  $(\operatorname{tg}(\varphi - \sqrt{3}))(\operatorname{tg}^2 \varphi + \sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 4) < 0, \cos \varphi < 0$ .

52.  $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + k\pi, k\pi\right) \cup \left(k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$ . Ind. Se rezolvă inecuația echivalentă  $\frac{\operatorname{tg}^3 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x(1 - \operatorname{tg} x)} > 0$ .

53.  $x \in \left[-\frac{\pi}{4} + k2\pi, \frac{\pi}{4} + k2\pi\right] \cup \left(3\frac{\pi}{4} + k2\pi, 5\frac{\pi}{4} + k2\pi\right)$ . Ind. Fiindcă  $\sin x - \cos x \leq \sqrt{2}$ , în ipoteza că  $x \neq 3\frac{\pi}{4} + k2\pi$ , se obține inecuația echivalentă  $|\cos x| \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

54. a)  $x \in (-1, \sin 1)$ ; b)  $x \in [-1, 1)$ ; c) nu are soluții; d)  $x \in \mathbb{R}$ ; e)  $x \in (-\infty, 0)$ .

55.  $x \in [-1, 0)$ . Ind. Inecuația este echivalentă cu sistemul  $x < x^2, -1 \leq x \leq 1$ .

56.  $x = 0$ .

57.  $x \in [-1, \sin 1)$ . Ind. Inecuația este echivalentă cu sistemul  $t^2 - 3t + 2 > 0, -1 \leq t \leq 1$ , unde  $t = \arcsin x$ .

## Capitolul 5

1. a)  $2\sqrt{2}\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$ ; b)  $2\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right)$ ; c)  $4\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$ ; d)  $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$ .

2. a)  $\rho = \sqrt{2 + 2\sin^2 \alpha}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$ ; b)  $\rho = \sqrt{2 + 2\cos^2 \alpha}, \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$ ;

c)  $\rho = 2\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right|, \varphi = \frac{\pi - \alpha}{2}$ .

3. a)  $\rho = 4\sqrt{2(1 + \sin^2 \alpha)}, \varphi = 30^\circ + \operatorname{arctg} \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$ ; b)  $i$ .

4.  $\rho_1 = 2^{12}, \varphi_1 = \pi; \rho_2 = (2 + 2\cos^2 \alpha)^6, \varphi_2 = 10 \operatorname{arctg} \frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1} + \pi$ .

$\rho_3 = 1, \varphi_3 = \frac{4\pi}{3}; \rho_4 = 1, \varphi_4 = -2n\alpha; \rho_5 = 2, \varphi_5 = n\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ .

5.  $2 \cos n\alpha$ .

7. a)  $\sqrt[10]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{5} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{4}}{5} \right), (k = 0, 1, \dots, 4);$   
 b)  $\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{3} \right), k = 0, 1, 2;$  c)  $\cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{4}, k = 0, 1, 2, 3;$  d)  $\sqrt[3]{2} \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{5\pi}{3}}{3} \right).$
9.  $\sin \left( \alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \frac{\sin \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$  pentru  $n$  par,  $\cos \left( \alpha + \frac{n-1}{2} \beta \right) \frac{\cos \frac{n\beta}{2}}{\cos \frac{\beta}{2}}$  pentru  $n$  impar.
10.  $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n+2}{2} \alpha.$
12. a)  $\cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}, k = 0, 1, 2;$  b)  $\sqrt[4]{2} [\cos (90^\circ k + 60^\circ) + i \sin (90^\circ k + 60^\circ)], k = 0, 1, 2, 3;$  c)  $\sqrt[4]{2} [\cos (90^\circ k + 57^\circ 30') + i \sin (90^\circ k + 57^\circ 30')], k = 0, 1, 2, 3.$
13. a)  $i \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}, k = 1, 2, \dots, n-1;$  b)  $\operatorname{ctg} \frac{k\pi}{n}, k = 1, 2, \dots, n-1.$
15. a)  $\cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}, 2 \left( \cos \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} + i \sin \frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3} \right), k = 0, 1, 2;$  b)  $2 \left( \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right), 3 \left( \cos \frac{k\pi}{2} + i \sin \frac{k\pi}{2} \right) k = 0, 1, 2, 3.$
16.  $S_1 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{n\pi}{4}, S_2 = 2^{\frac{n}{2}} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}.$
18.  $Z'_3 = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 + \sqrt{3}}{2}, Z_3'' = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - \sqrt{3}}{2}.$

## Capitolul 6

2. a)  $b = 40,62, c = 40,75;$  b)  $b = 105,7, c = 124,34;$  c)  $a = 73,58, c = 53,11;$  d)  $a = 68,32, c = 61,62;$  e)  $B = 35^\circ 8', c = 8,174;$  f)  $c = 72,22, B = 65^\circ 46' 26''$  g)  $a = 420,1, B = 81^\circ 30';$  h)  $B = 37^\circ 53' 16'', a = 229,6.$
3. a)  $a = 178,554, b = 130, c = 122,4, B = 46^\circ 43' 29'';$  b)  $b = 180, c = 135,6, B = 53^\circ 7' 49'';$  d)  $c = 3889,4, c = 2753,2, B = 54^\circ 42' 20''.$
5.  $B = 75^\circ.$
11. a)  $l = 54,46, c = 62,94;$  b)  $b = 449, c = 496,2;$  c)  $a = 3,682, c = 10,16;$  d)  $a = 13,30, b = 5,334;$  e)  $c = 531,9, A = 68^\circ 22';$  f)  $c = 458,5, B = 43^\circ 13';$  g)  $c = 31,01, B = 114^\circ 23';$  h)  $a = 62,17, B = 21^\circ 56'.$

12. a)  $c = 27,62$ ,  $B = 49^\circ 59'$ ; b) două soluții:  $c = 20,07$ ,  $B = 75^\circ$  și  $c = 6,24$ ,  $B = 105^\circ$ ; c) imposibil; d) două soluții:  $c = 65$ ,  $B = 137^\circ 41'$  și  $c = 115,3$ ,  $B = 42^\circ 19'$ ; e)  $A = 49^\circ 26'$ ,  $B = 99^\circ 22'$ ; f)  $A = 48^\circ 22'$ ,  $B = 58^\circ 22'$ ; g)  $A = 16^\circ 26'$ ,  $B = 30^\circ 24'$ ; h)  $A = 68^\circ 4'$ ,  $B = 64^\circ 24'$ .

32.  $h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ .

33.  $S = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{n \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} - (n-2) \frac{2}{\pi}}{\left(1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}\right)^2}$ .

34.  $\frac{AC}{BC}$ ; punctul  $D$  este proiecția lui  $C$  pe  $AB$ .

35.  $38^\circ 10' 15''$ .

36.  $58^\circ 31' 4''$ .

37.  $2AC = \sqrt{l^2 - h^2 + \frac{12a^3}{h} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} + \sqrt{l^2 - h^2 - \frac{12a^3}{h} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$ .

38.  $S = \pi a^2 (1 - \cos 2\varphi + \sin 2\varphi)$ .

## Capitolul 7

1. Vezi aplicația nr. 1; se găsește 44,064 m
2. 32,23 m.
3.  $34^\circ 35' 53''$ .
4.  $21^\circ 48' 06''$ .
5. Vezi aplicația nr. 2; se găsește 97,52 m.
6. 63,90 m.
7. 64,52 m.
8. Vezi aplicația nr. 3; se găsește 90,16 m.
9. Vezi aplicația nr. 4; se găsește 1 120,13 m.
10. Vezi aplicația nr. 5; se găsește 4590 m.
11. 1462,204 m.
12. Calculăm unghiurile  $A$  și  $B$  cu formulele  $\frac{A+B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{ctg} \frac{C}{2}$  și apoi  $AB = 2590,50$  m.
13.  $AB = 146,66$  m.
14.  $AB = 2,5$  km.
15. Vezi aplicația nr. 6; se găsește  $AB = 787,85$  m.
19. Vezi aplicația nr. 7; se găsește  $MN = 71,96$  m.
20. Vezi aplicația nr. 8; se obține  $R = 6514,715$  km.
21. Vezi aplicația nr. 10; se obține  $AB = 4,44$  m.
16.  $AB = 872,70$  m.
17.  $AB = 71,95$  m.
18.  $d = 5716,25$  m.
22. Notăm  $x = AC - 1,621$  și  $\varphi = \widehat{APD}$ ,  $D$  fiind piciorul perpendicularei duse din  $P$  pe  $AB$ . Avem  $x = PD \operatorname{tg} \varphi$  și  $x + AB = PD \operatorname{tg} (\varphi + 4^\circ 27' 54'')$ . Se elimină  $\operatorname{tg} \varphi$  din cele două relații și se obține  $AC = x + 1,621 = 41,45$  m.
23. Vezi aplicația nr. 12; găsim 8 m și 18 m.
24. Vezi aplicația nr. 14; se obține:  $MA = 341,38$  m,  $MB = 285,53$  m,  $MC = 341,94$  m.

25. Notăm cu  $A, B$  cele două puncte, iar cu  $C$  și  $D$  cele două poziții ale observatorului ( $C$  fiind vârful unghiului  $\alpha$ ). Observăm că  $C$  este punctul de tangență al cercului dus prin  $A, B$  și tangent dreptei  $OD$ . Notăm  $AB = x$ . Avem  $a^2 = DA \cdot DB$ . Din triunghiul  $ADC$  obținem:

$$DA = \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}}; \text{ rezultă } a^2 = \left( x + \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \right) \cdot \frac{a \cos \frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos \frac{\alpha - \beta}{2}} \text{ ș.a.m.d. Obținem } x =$$

$$= \frac{2a \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

Prefață	3
Cap. 1. Unități de măsură a unghiurilor și arcelor. Relații între ele	5
Exerciții și probleme rezolvate	6
Exerciții și probleme propuse	9
Cap. 2. Funcții trigonometrice	12
Exerciții și probleme rezolvate	13
Exerciții și probleme propuse	27
Cap. 3. Formule fundamentale	30
Exerciții și probleme rezolvate	35
Exerciții și probleme propuse	60
Cap. 4. Ecuații trigonometrice	69
Exerciții și probleme rezolvate	70
Exerciții și probleme propuse	101
Cap. 5. Numere complexe sub formă trigonometrică	105
Exerciții și probleme rezolvate	106
Exerciții și probleme propuse	115
Cap. 6. Aplicațiile trigonometrice în geometrie	117
Exerciții și probleme rezolvate	118
Exerciții și probleme propuse	157
Cap. 7. Lucrări practice	161
Probleme rezolvate	161
Probleme propuse	170
Indicații și răspunsuri	173
Bibliografie	191

Nr. Colilor de tipar : 12



Combinatul Poligrafic  
„CASA ȘINTEII“  
București — R.S.R.  
Comanda 226/1848

## Bibliografie

- Ionescu, I., Țițeica G., Ioachimescu, A. G., Cristescu, V. *Culegere de probleme de aritmetică, algebră și trigonometrie*. 1901.
- Ghermănescu, M., Angelescu, Tr., Sager, I. *Probleme de matematici pentru examenele de admitere în instituțiile superioare*. 1958.
- Cristescu, V. *Culegere de probleme de trigonometrie*. 1938.
- Predoiescu, I. M., Ghiliceanu, M. *Probleme de trigonometrie pentru examenele de admitere în învățământul superior*. Vol. I și II. 1958.
- Abramescu, H., Lupan, V. *Lecțiuni de trigonometrie*. 1927.
- Haret, C. Spiru, Tutuc, I. *Lecțiuni de trigonometrie*. 1929.
- Costin, V. *Curs de trigonometrie*. 1927.
- Focșă, D., Stamatescu, I. *Curs de trigonometrie*. 1935.
- Marișescu, P., Constantinescu, G. V. *Trigonometria*. 1946.
- F. J. *Éléments de trigonométrie rectiligne*. 1898.
- F. G. M. *Esercices de trigonométrie*.
- Grèvy, A. *Trigonométrie*. 1912.
- Novoselov, S. I. *Curs special de trigonometrie* (trad. din lb. rusă) Editura tehnică, București, 1956.
- Kojeurov, P. *Trigonometria*. Fizmatgiz, Moscova — 1962.
- Kalinjin, R. A. *Algebra i elementarne funkții*. 1964.
- Lidskii, V. B. *„Zadaci po elementarnoi matematike*. 1965. Editura didactică și pedagogică, 1958. *Culegere de probleme de trigonometrie*. (trad. din lb. rusă)
- „Gazeta matematică“, seria B.